КВАНТ+ МАРТ АПРЕЛЬ 2011 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

4 июня 2011 года исполнилось 90 лет Моисею Исааковичу Каганову – автору и другу журнала «Квант». Мы поздравляем Моисея Исааковича с этим славным юбилеем и желаем доброго здоровья, творческого долголетия и плодотворного сотрудничества с журналом «Квант».

МОИСЕЙ ИСААКОВИЧ КАГАНОВ – физик-теоретик, специалист в области квантовой теории твердого тела. Доктор физико-математических наук, профессор МГУ им. М.В.Ломоносова и почетный доктор Вроцлавского технологического университета. Участник Великой Отечественной войны. В 1949 году окончил физико-математический факультет Харьковского государственного университета, с 1949 по 1970 год работал в Украинском физико-техническом институте, а с 1970 по 1994 год – в Институте физических проблем им. П.Л.Капицы. Сейчас живет в США.

Моисей Исаакович – автор многих научных и научно-популярных книг и статей. В журнале «Квант» опубликованы 23 его статьи: «О трении» (совместно с Г.Любарским) (1970, №12), «О механике Аристотеля» (совместно с Г.Любарским) (1972, №8), «Электрон движется с трением» (совместно с Г.Любарским) (1973, №6), «Электрон излучает фотоны» (совместно с Г.Любарским) (1974, №12), «Выдающийся физик-теоретик XX века (Л.Д.Ландау)» (1983, №1), «Много или мало?» (1988, №1), «Взглянув на термометр...» (1989, №3), «Письма о физике» (1990, №4), «Апология физики» (1992, №10), « Из жизни физиков и физики» (1994, №1), «Вокруг шарика» (совместно с А.Гросбергом) (1996, №2), «Как устроены металлы?» (1997, №2), «Просто физика» (1998, №4), «Законы сохранения помогают понять физические явления» (1998, №6), «Сверх...» (2000, №5), «Сверх... (2)» (2001, №5), «Об абстракции в физике» (2003, №1), «Удивление, понимание, восхищение» (2004, №2), «Как квантовая механика описывает микромир» (2006, №2, 3), «Квантовые чудеса» (2007, №4, 5), «Лев Давидович Ландау (отрывок из книги «Школа Ландау: что я о ней думаю)» (2008, №1), «Электроны, фононы, магноны» (2009, №1), «Две простые, но не вполне тривиальные формулы» (2010, №1).

Предлагаем вниманию наших читателей две статьи из этого списка.

Апология физики

М.КАГАНОВ

НУЖНО ЛИ ФИЗИКУ ЗАЩИЩАТЬ? ОТ КОГО? ЭТИ вопросы, наверное, сразу возникают при взгляде на название статьи. Общеизвестна, например, защита физиков от обвинения в открытии способа массового уничтожения. Не об этом пойдет здесь речь. Физика, будучи источником идей и технологий, используемых в инженерной практике, воспринимается многими как приземленная наука, техническая дисциплина, якобы бездуховная по самой своей сути. Вот от этой точки зрения хочется защитить физику.

Трудно дать всех устраивающее определение духовности. Но мне кажется несомненным, что в него входит интерес человека к окружающему его миру не только как к удобной или неудобной среде обитания. Трудно назвать духовным человека, не замечающего красоты пейзажа, безразличного к восходам и закатам, не интересующегося миром животных и растений, не испытывающего почтительного удивления перед фантастическим «устройством» любого уголка живой природы. Удивление, испытываемое человеком при взгляде на окружающую природу, естественно превращается в любопытство, а развитое обучением и чтением – в любознательность.

Конечно, у разных людей любознательность останавливается на разном уровне познания. Выясняется, что, для того чтобы ответить на «детские» вопросы «почему?» и «как?», необходимо создать глубокие теории, провести огромное число тонких экспериментов. Постепенно, переходя от простого наблюдения к фиксации строгих результатов экспериментов, а в дальнейшем все глубже проникая в суть вещей, человек постигает структуру Мира, начинает понимать движущие силы природных явлений.

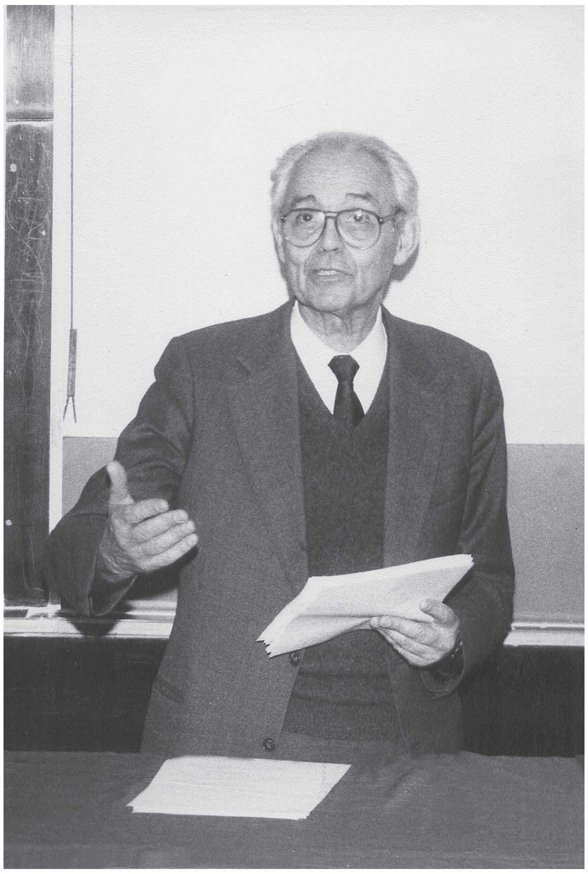
В углублении процесса познания таится опасность. Любование солнечным закатом, его воспроизведение на холсте воспринимается как духовная деятельность[1], а выяснение спектрального состава солнечного света, исследование механизмов излучения световых квантов многим кажется скучным, узко профессиональным занятием, требующим знания конкретных методов – правил работы с формулами или с приборами. Конечно, к исследованию явлений окружающего нас Мира необходимо подходить профессионально – знать правила работы с формулами и приборами. Дилетантство и верхоглядство особенно нетерпимы в тех науках, которые имеют сложный аппарат и инструментарий. Есть, однако, своеобразное диалектическое противоречие между простотой наиболее глубоких вопросов, которые ставит перед нами Природа, и сложностью способов ответа на них. Иногда человек, занятый (профессионально!) исследованием определенного круга явлений, не видит связи этих явлений с устройством Мира, не ощущает, что его работа вносит допол-

[1] *Конечно, только в том случае, если в пейзаж привнесено человеческое отношение к тому, что видит художник.*

нительный мазок в Картину Мира. Даже в таком (по сути огорчительном) случае я бы не обвинил этого человека в бездуховности. Вполне могу себе представить, что он (этот гипотетический «приземленный» исследователь) бездну эмоций – а не мыслей – потратил на разработку методов вычисления или измерения.

На памяти моего поколения физиков – катастрофа, произошедшая с Л.Д.Ландау[2]. Спасенный врачами и физиками после автомобильной аварии, Лев Давидович не вернулся к научной деятельности. Прожил Л.Д. после катастрофы шесть лет, разговаривавшие с ним многократно убеждались, что у него сохранилась память, что он способен на тонкие оценки чужой деятельности, но работать как физик-теоретик он не мог. Врачи утверждали, что это – последствие травматического отключения той области мозга, которая ответственна за эмоциональную сферу...

Еще один пример, на первый взгляд далекий от предыдущего. Однажды на Ученом совете Института физических проблем (теперь институт носит имя Петра Леонидовича Капицы: тогда П.Л. был жив и вел Совет, о котором идет речь) выступил Яков Борисович Зельдович[3] и высказал (не помню, по какому поводу) общие мысли о природе творчества. Основная мысль сводилась к тому, что любознательность – одна из потребностей человека. Наука – способ удовлетворения этой потребности. И ее необходимо удовлетворять, как потребность в пище, одежде и т.п. Речь, кажется, шла о финансировании фундаментальной науки. Поэтому Я.Б. подчеркивал не практическую ценность результатов научной деятельности, а именно удовлетворение потребности человека (человечества) в знании. Мне выступление очень понравилось (поэтому и запомнил). Как всякое интересное выступление, его активно обсуждали не только на Совете, но и после. Сильное впечатление на меня произвели слова одного молодого талантливого физика-теоретика. Он не то чтобы не соглашался с Я.Б. Но признавался, что когда он занят вычислениями, то любознательность, желание получить ответ на вопрос, который привел к постановке задачи, не играет большой роли, волнует (хочется сказать, вдохновляет – так я его понял) сам процесс вычисления, радость от удивительной гармонии, которая ощущается в процессе использования строгих математических правил, и, может быть, лишь подсознательное ощущение того, что вычисление имеет отношение к реалиям природы. Должен признаться, что слова этого молодого физика соответствуют и моему отношению к рутинному (казалось бы) процессу получения ответа...



Моисей Исаакович Каганов

Хочется, чтобы читатель-неспециалист имел в виду эту сторону работы физика и, думаю, любого научного работника. Есть затасканное, но точно отражающее суть дела слово – творчество. Научная работа – творчество. Творчество в любом виде человеческой деятельности вызывает вдохновение. И это превращает деятельность научных работников в духовную...

И все же. Есть процесс – творчество и есть результат. Тут, казалось бы, духовность не при чем. Получив результат (измерив или вычислив что-то), мы узнали то, что объективно существует. И, как уверено большинство научных работников, существует вне и независимо от нашего сознания. Имеет ли сам результат научной деятельности какое-либо отношение к духовности? Я уверен, что да. И попробую обосновать свою уверенность. Для этого нужно постараться понять процесс постижения устройства Мира. Далеким от физики людям может показаться, что он напоминает разгадывание головоломки. Знаете, есть такие головоломки: дается шарик или кубик, состоящие из отдельных неправильной формы кусочков. Надо уметь шарик (или кубик) разобрать и собрать из этих кусочков. При попытках разгадки головоломки очень важно то, что знаешь – решение есть. Еще: разобрав головоломку на части, уверен, что части неделимы. И наконец, всегда

[2] *Я думаю, нет необходимости представлять читателям академика, лауреата Нобелевской и Ленинской премий Л.Д.Ландау (1908–1968). Л.Д. – один из крупнейших физиков-теоретиков XX века, снискавший себе славу не только своими научными результатами, но и замечательной многотомной монографией «Курс теоретической физики», по которой учились и учатся многие поколения физиков-теоретиков, а также созданием одной из наиболее знаменитых и активных школ физиков-теоретиков.*

[3] *Я.Б.Зельдович (1914–1987) – талантливый и необычайно продуктивный физик-теоретик. Ему принадлежат выдающиеся достижения в физике горения и физике элементарных частиц, астрофизике и космологии. Вместе с А.Д.Сахаровым и Ю.Б.Харитоном принимал участие в создании советского атомного оружия. Академик, трижды Герой Социалистического Труда.*

известны правила сборки. Они – как законы природы, если сравнить разгадывание головоломок с процессом познания. Так вот о правилах сборки: априори известно, что они есть. Общие для всех головоломок – нельзя гнуть, прилагать силу и т.п. И вполне конкретные, для каждой головоломки свои – порядок разборки и сборки.

А теперь вернемся к Миру. Пожалуй, физики давно убедились, что все из чего-то состоит. Но из чего? Существует ли предел разложимости? Когда я учился в университете, все были уверены (и нас этому учили), что все построено из электронов, протонов и нейтронов, и для этих «кирпичей» мироздания создали специальный термин – элементарные частицы. Потом «элементарные» частицы посыпались, как из рога изобилия. Что ни год, то новая частица. Их классифицировали, распределяли по семействам, устанавливали разнообразные соотношения и… поняли, что все «элементарные» частицы недостаточно элементарны. «Появились», теперь уже только в работах физиков-теоретиков, новые претенденты на роль «кирпичей» мироздания – кварки, удивительное создание человеческого ума, частицы с зарядом 1/3 и 2/3 от электронного заряда, частицы, которых никто не видел вне бывших элементарных частиц, но в реальности существования которых, пожалуй, никто не сомневается…

В контексте того, о чем я пишу, для меня важно следующее: кварки – порождение человеческого ума, необходимое для построения стройной, непротиворечивой и красивой картины Мира.[4]

Остановимся на пути углубления внутрь мельчайших частиц вещества и задумаемся над тем, как из них строится весь окружающий нас Мир и, конечно, мы сами.

Одно небезынтересное наблюдение. Углубление в структуру «элементарных» частиц не заставило нас пересмотреть свои взгляды на строение кристаллов, не изменило наших представлений о природе магнетизма или сверхпроводимости. В физике существует своеобразная иерархичность. Пытаясь понять свойства макроскопических объектов, нет необходимости добираться «до самой сути». Следует вовремя остановиться. Например, выясняя природу электропроводности и теплопроводности металлов, не следует задумываться о строении ядер тех атомов, из которых металл построен. Иерархичность, конечно, очень помогает и, в частности, обеспечивает консервативность (сохранность) добытых наукой результатов. Действительно, если бы не иерархичность, то любое продвижение вперед требовало бы коренной перестройки всего здания физики. По сути это означало бы невозможность движения вперед в познании свойств Природы.[5]

Итак, вернемся к построению Мира (тел нашего Мира) из мельчайших частиц вещества. Ну, это уж точно конструктор! Огромный, сложный, но все же конструктор. Такое мнение часто приходится слышать, к сожалению, не только от людей, далеких от физики, но и от физиков. Особенно часто, если эти физики занимаются физикой элементарных частиц. И все же с этим суждением я в корне не согласен.

Не согласен потому, что для достижения понимания строения и устройства Мира вещей и тел нельзя сформулировать правила, пригодные для всех случаев жизни. Процесс построения, конечно же, творческий процесс. Мы уже говорили об этом. Но дело не только в том, что приходится, преодолевая трудности, использовать все свои интеллектуальные способности. Главным образом дело в том, что приходится создавать, творить те сущности, из которых, собственно говоря, и строится Мир со всем богатством его свойств.

Боюсь, читатель подумает, что ему морочат голову. «Ведь речь идет о строении Мира из электронов, протонов и нейтронов, – скажет он. – Зачем же создавать еще какие-то «сущности»?» А затем, что иначе ничего нельзя понять. Самый простой пример. Исследуя свойства твердых тел, мы обнаруживаем, что твердые тела очень похожи на… газы. «Ерунда какая-то», – заметит даже несколько обиженно читатель. – Ведь газ – совокупность почти невзаимодействующих частиц, а твердое тело состоит из сильно взаимодействующих частиц. Чтобы разделить твердое тело на части, надо потратить немало энергии. А вы говорите, что твердое тело похоже на газ частиц». «Но я и не говорил про газ *частиц*», – возразит автор. И действительно, твердое тело ведет себя как газ не частиц, а *квазичастиц* – фононов, специально введенных сущностей, позволяющих понять свойства макроскопических тел. Конечно, можно долго спорить, *есть* ли фононы или они *введены.* Конечно, они есть, но не как структурные единицы вещества. Не из них состоит твердое тело, а из атомов или молекул, а бывает и из ионов разных знаков. Но чтобы понять, как движутся атомные частицы, пришлось ввести фононы, т.е. выяснить (увидеть, почувствовать, угадать), что движутся атомные частицы так, будто тело состоит не из атомов (молекул, ионов), а, повторим, из квазичастиц – фононов. А введя фононы, удалось получить бесконечное число следствий, подтверждающих факт существования фононов. Твердое тело проводит тепло так, как проводит тепло газ фононов. И поглощает звук так, как поглощает газ фононов. И так далее и тому подобное…

Здесь не место перечислениям и подробным описаниям. Хочется подчеркнуть: фононы – творение ума, они

[4] *Боюсь, в этой статье не удастся сколько-нибудь подробно обсудить важную для нашего рассказа тему: «Эстетика и наука». Хочется только отметить два обстоятельства. Первое. В оценках научной красоты ученые более едины, чем в оценке бытовой красоты. И второе. По какой-то таинственной причине красивый результат редко бывает неправильным. Если бы я был верующим, то подумал бы, что эстетические критерии у Господа Бога и ученых совпадают. Или даже так: Господь снабдил ученых эстетическими критериями, чтобы им легче было ориентироваться среди научных результатов. Наверное, чтобы последнюю фразу произнести искренне, надо быть глубоко верующим человеком.*

[5] *Не стоит ли об этом задуматься творцам перестройки нашего общества? Как было бы хорошо, если бы в результате перестройки возникло общество, жизнедеятельность структур которого не зависит или хотя бы мало зависит от новаций, происходящих в политических, идеологических и других сферах. Даже помечтать об этом и то приятно!*

«созданы» для понимания, они – результат духовной деятельности человека, его творчества. Конечно, можно сказать и иначе: физики увидели и расшифровали, как движутся атомные частицы в твердом теле. Но что уж заведомо духовная деятельность, так это создание новых слов, а значит, и новых понятий. Для описания движения атомных частиц пришлось придумать новые слова: квазичастицы, фононы, магноны... – слова, которых не было в доквантовой физике твердого тела.

Объективность существования материи часто «доказывают» фактом существования Природы – в ее очень похожей на сегодняшнюю форме – до появления на Земле человека. Мне, должен признаться, подобное утверждение кажется убедительным. Или, точнее, не столько логически убедительным, сколько соответствующим моему восприятию Природы эволюционирующей и в результате эволюции сотворившей думающее существо – человека, способного постичь (постигать) устройство Природы.

Процесс постижения оказался необычайно трудным, необычайно продуктивным и (это – главное, что я хочу сказать) необычайно тесно связанным с самим процессом мысли. В Природе, в свойствах материи человек открывает то, что (казалось бы!) есть только продукт, результат деятельности человеческого мозга, прежде всего – логику. Математика есть материализованная логика. Почему Природа подчиняется математическим законам? Почему она описывается доступными человеческому уму законами? Опять хочется (в поисках уютного ответа) прибегнуть к религиозному мировоззрению и, как бы обратив всю постановку вопроса, сказать: «Природа создана такой, чтобы быть постижимой человеческим умом...»

Я не знаю ответов на эти вопросы. И, наверное, не умею слишком строго их формулировать. Я не философ. В разное время, в разные периоды жизни к этим вопросам у меня есть и было разное отношение. Не всегда они меня волновали. Занятый решением конкретных задач, я просто не замечал, что подобные вопросы существуют. Встретившись с ними в статьях классиков (Эйнштейна, Бора, Шредингера, позднее Гейзенберга), я относился к ним с почтением, не допускающим «вмешательства». Но постепенно, не переставая заниматься вполне конкретной вычислительной деятельностью физика-теоретика, обнаружил, что меня волнуют общие проблемы, что интересны не только вполне определенные результаты теории или эксперимента, но и то, какое место занимают эти результаты в том, что принято называть научной картиной Мира. И, более того, возникла потребность обдумать, в каком соотношении с Миром находится научная картина Мира.

Не пытаясь переквалифицироваться в профессионального философа, я написал несколько статей и одну небольшую брошюру. Но ни разу я не высказался столь определенно, как здесь, не выразил своей уверенности, что Наука – одна из сторон духовной жизни человечества. Что невозможно ее свести к полезной для развития производительных сил деятельности человека. И даже к удовлетворению любознательности как жизненно важной потребности людей. Что нет ни одного сколько-нибудь важного научного результата, в который не была бы вложена частица души человеческой. И хочу повторить еще раз. Частица души вложена не только в процесс добывания истины, но и в саму истину. Наука есть в каком-то смысле результат очеловечения Природы. Слова, понятия, соотношения – это то, чем наделил Природу человек. Если художник показал людям внешнюю красоту Мира, то ученый вскрыл существование внутренней интеллектуальной красоты, прежде всего проявляющейся в познаваемости законов Природы, в удивительном многообразии проявлений сравнительно просто формулируемых основных законов, управляющих движением материи.

...Захотелось мне поделиться этими мыслями с молодыми людьми, так как заметил утрату романтического отношения к Науке и, особенно, к физике.

Много или мало?

М.КАГАНОВ

Однажды я задумался, сколько книг человек может прочитать за жизнь. Оценил я это число так. Скажем, человек читает 60 лет. В году 52 недели. Пусть в неделю человек прочитывает две книги. Значит, около 100 в год. Итого – примерно 6000 книг за жизнь. Это число, не обсуждая, как оно получилось, я назвал разным людям. «Так мало!» – сказали одни. «Неужели так много?!» – удивились другие. И я подумал: в нас нет запрограммированной чувственной оценки чисел. Только сравнивая одно число с другим, только придавая числу определенный смысл, мы ощущаем его величину. Число прочитанных книг, конечно, имеет вполне определенный смысл (это не просто безымянные 6000), но ощутить его (оценить, сказать – много это или мало) может только тот, кто сумеет подобрать сравнение. Например, задумавшись: «А сколько книг в неделю (месяц, год, ...) читаю я?»...

Физика имеет дело с именованными величинами. Любая физическая величина имеет размерность. Существует специальный раздел физики, изучающий принципы размерности, системы единиц, эталоны этих единиц и т.д. Должен признаться, всегда этот раздел физики мне казался достаточно скучным. Может быть, из-за того, что из него много фактов надо держать в голове: как связаны между собой джоуль и эрг, чем отличается эрстед от гаусса, сколько кулонов в единице заряда по системе СГС и т.д. и т.п. Но, как ни грустно, без этого обойтись нельзя. Приходится, переходя от одних значений к другим, выражать их в определенных единицах, и притом в одинаковых. Сравнивая магнитное поле, созданное сверхпроводящим соленоидом, с магнитным полем Земли, оба поля надо выразить в одних единицах: в гауссах или в теслах – безразлично, отношение полей от этого не зависит. А ведь именно отношения физических величин нам, как правило, и важны, так как именно они (безразмерные отношения) определяют то, что физики любят называть «физикой явления». Эту мысль мы разовьем ниже, а сейчас еще несколько слов о размерных величинах.

Задумывались ли вы о том, почему все физические величины могут быть выражены через единицы длины (сантиметр), времени (секунду) и массы (грамм)?[1] Это относится и к электрическим, и к магнитным, и к тепловым, и к оптическим величинам. В физике нет величин, которые нельзя было бы записать через сантиметр, секунду и грамм. Ответ на вопрос, почему все физические величины выражаются через грамм, сантиметр и секунду, может показаться неожиданным. Дело в том, что это связано с определением физики. Физика занимается теми явлениями, которые могут быть описаны с помощью сантиметра, секунды и грамма. Сантиметр и секунда нужны для описания движения в пространстве (кинематика), а грамм необходим для связи этого движения с силой, вызывающей движение (динамика). Вспомните, что по закону Ньютона сила равна ускорению, умноженному на массу. Конечно, существует множество явлений, которые мы не можем описать с помощью физических величин. Например, все, что относится к развитию человеческого общества – к истории, экономике и т.п. Исследование этих явлений, требующее иногда сложных математических методов, не принадлежит физике. И, конечно, физика не исчерпывается измерениями. Фундаментальную роль в ней играют представления, положения, законы, иногда выраженные в виде математических уравнений, а иногда ограничивающиеся словесной формулировкой. Вот яркий пример: все тела состоят из молекул, молекулы – из атомов, атомы – из ядер и электронов, а ядра – из протонов и нейтронов. В этой фразе – огромная информация, концентрация многовекового изучения природы, изучения, основанного на измерении величин, которые (все!) могут быть выражены через сантиметр, секунду и грамм.

К основным законам природы, несомненно, следует отнести законы сохранения. Кроме хорошо известных – законов сохранения энергии и импульса – существуют и более экзотические. Например, закон сохранения барионного заряда, утверждающий, что число частиц типа протон или нейтрон не изменяется при взаимодействии между частицами.[2] Или другой пример: состояние атомных и субатомных частиц характеризуется некоторой величиной, которую называют волновой функцией. Чаще всего ее обозначают греческой буквой ψ. Волновая функция ψ – функция координаты $\vec{r}$. Так как все точки пустого пространства эквивалентны, то любую точку можно избрать за начало координат. Так вот, функция $\psi(\vec{r})$, согласно уравнениям квантовой механики, может быть либо четной, либо нечетной –

$$\text{либо } \psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r}),$$

$$\text{либо } \psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r}),$$

причем, что бы с частицей ни происходило, это свойство волновой функции сохраняется. Говорят, что существует закон сохранения четности. Если у частицы четная волновая функция, то такой частице можно приписать четность +1, если волновая функция нечетная – то −1. Кроме того, волновая функция нескольких не взаимодействующих друг с другом частиц есть произведение волновых функций отдельных частиц, а ее четность – произведение четностей отдельных частиц. Это дает возможность обобщить закон сохранения четности на весьма сложные случаи. Например: сталкиваются две частицы – четная и нечетная, а в результате рождаются новые частицы; если их две, то одна из них должна быть четной, а другая нечетной, а если три, то все они могут быть нечетными. Для нас важно: сохраняется безразмерное число +1 или −1.

Но для проверки такого и подобных утверждений необходимы измерения. Для этого что-то должно двигаться за счет действия на это «что-то» каких-то сил. И мы опять приходим к физическим величинам, размерность которых может быть сведена к сантиметру, секунде, грамму. Я очень не хотел бы, чтобы меня восприняли как «врага» безразмерных чисел. Наоборот: одна из задач этой статьи – убедить читателя в пользе и даже необходимости безразмерных комбинаций размерных величин. Более того, истинно безразмерные числа, т.е. не являющиеся комбинациями размерных величин, тоже часто встречаются в физике. Трудно найти формулы, в которые не входят трансцендентные числа e и π, не говоря уже просто о самых различных численных множителях, имеющихся в любой формуле.

Вернемся к физическим величинам, обладающим той или иной размерностью Задача физической теории – связать различные физические величины соотношениями, которые допускают экспериментальную проверку. Например, желая проверить, как изменяется со временем путь s, проходимый частицей, движущейся с постоянным ускорением a, мы должны сравнить свои

[1] *Статья написана в системе единиц СГС (сантиметр – грамм – секунда). В школе эту систему уже давно не изучают, однако профессиональные физики обычно пользуются именно ею (а не знакомой школьникам СИ). Дело в том, что при написании формул в этой системе единиц появляющиеся в них коэффициенты имеют ясный физический смысл. Подумав, редакция не решилась переводить формулы статьи в СИ, так как при этом аромат настоящей физики, веющий от статьи, был бы безвозвратно утерян. (Прим. ред.)*

[2] *Античастицам приписывается барионный заряд противоположного знака. Так, у протона и нейтрона барионный заряд равен 1, у антипротона и антинейтрона он равен −1.*

измерения с формулой

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} = v_0 t\left(1 + \frac{at}{2v_0}\right), \qquad (1)$$

где v_0 – начальная скорость частицы. Это – очень простая формула. Но и она (как все формулы в физике!) требует, чтобы все входящие в нее величины имели соответствующие размерности: если s измеряется в сантиметрах, а t – в секундах, то v_0 – в см/с и a – в $\text{см}/\text{с}^2$. Но пусть мы хотим не только проверить эту формулу, но и выяснить, как сказывается на характере движения частицы ускорение. Для этого удобна вторая форма записи (когда $v_0 t$ мы вынесли за скобки). Из нее видно: сначала (при $t \ll 2v_0/a$) роль ускорения незначительна – частица практически движется с постоянной скоростью v_0, зато потом (при $t \gg 2v_0/a$) частица «забывает», какая у нее была начальная скорость, – ее движение определяется ускорением. Как видите, нельзя однозначно ответить на вопрос, большое или маленькое ускорение у частицы. Ответ зависит от того, какой этап движения нас интересует. А выяснили мы это, сравнив с единицей безразмерное отношение $at^2/(2v_0 t) = at/(2v_0)$. Строго говоря, отбрасывая первое или второе слагаемое, надо было бы учесть, с какой точностью измеряет пройденный путь наш прибор, и разрешить себе пренебрегать соответствующим слагаемым только в том случае, если оно окажется меньше относительной ошибки измерения. Мы больше не будем вдаваться в подобные тонкости, хотя они очень важны для анализа экспериментов.

При решении реальных задач мы часто должны упрощать – без этого попросту задачу решить нельзя. Упрощение всегда основано на пренебрежении малыми членами по сравнению с большими. Но для того чтобы что-то отбросить, надо произвести сравнение членов, а сравнивать можно только величины одной размерности. Сказанное формулирует первое (основное) правило пользования размерными величинами. Многие физики так боятся это правило нарушить, что, начиная решать задачу, сразу обезразмеривают входящие в нее величины.

Вернемся к движению частицы с постоянным ускорением. Давайте время будем измерять в единицах $2v_0/a$, т.е. введем вместо времени t «безразмерное время» $\tau = at/(2v_0)$, а пройденный путь – в единицах $2v_0^2/a$, т.е. введем «безразмерную длину» $\sigma = as/(2v_0^2)$. Тогда формула (1) предельно упростится:

$$\sigma = \tau(1+\tau). \qquad (2)$$

Переход от формулы (1) к формуле (2) и называется обезразмериванием. Преимущество такого подхода очевидно: изучив зависимость σ от τ, мы узнаем, как движется частица с любым постоянным ускорением, какую бы начальную скорость она ни имела.

Надо признаться: в сложных случаях не всегда рекомендуют обезразмеривать формулы, так как, проверяя размерность *до* и *после* вычисления, легко найти

ошибку или убедиться, что вычисление, по-видимому, проделано правильно.

Для того чтобы сформулировать еще одно правило, которое необходимо учитывать при упрощениях, основанных на существовании в формуле (в уравнении) малой величины, чуть усложним формулу (1), считая, что в момент времени $t = 0$ тело находилось в точке с координатой s_0:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (1')$$

Теперь расстояние будем измерять в единицах s_0, а время – в единицах s_0/v_0. Тогда

$$\sigma = 1 + \tau + \varepsilon\tau^2, \qquad (2')$$

где $\varepsilon = as_0/(2v_0^2)$ – безразмерная величина.

Прежде всего обратим внимание на то, что, избери мы прежние единицы для времени и расстояния, мы получили бы другое уравнение –

$$\sigma = \sigma_0 + \tau(1+\tau),$$

с другой безразмерной величиной $\sigma_0 = as_0/(2v_0^2)$, входящей в формулу. Уже этот факт достоин подчеркивания: как правило, есть разные способы обезразмеривания, и нужно выбирать тот, который удобнее. Итак, пусть безразмерная величина ε в уравнении (2′) очень мала ($\varepsilon \ll 1$); ну, скажем, $\varepsilon \approx 10^{-3}$ или и того меньше. На минуточку представьте себе, что ε стоит множителем не перед τ^2, а перед какой-нибудь сложной функцией «безразмерного времени» τ. Сколь упростилась бы формула, если бы, воспользовавшись тем, что величина ε мала, мы отбросили слагаемое, содержащее ε. Но мы понимаем (вернувшись от (2′) к (2)), что для этого нужно было бы полностью пренебречь ускорением, или, в более общих терминах, пренебречь специфическими чертами изучаемого движения.[3] Именно этого делать нельзя! Выливать воду из ванночки надо осторожно – можно выплеснуть купающегося в ней ребеночка.

[3] *Не говорю уже о формальной неправильности пренебрежения слагаемым $\varepsilon\tau^2$ при больших значениях τ. Думаю, это совершенно понятно. И все же: $\varepsilon\tau^2$ становится порядка единицы или больше только при $\tau \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$. Это время стремится к бесконечности, когда $\varepsilon \to 0$. Представим себе, что мы изучаем некий процесс, который длится небольшое конечное время, а выяснилось, что слагаемое $\varepsilon\tau^2$ достигает значения единицы тогда, когда наш процесс уже давно закончился. Конечно, в этом случае без зазрения совести такое слагаемое можно опустить.*

До сих пор мы имели дело с известным законом движения и манипулировали входящими в формулу известными величинами. Теперь подумаем о значительно более сложной проблеме. Давайте мысленно перенесемся в доквантовую эру. Опыты Резерфорда показали: во-первых, атом – сложная система, масса атома сосредоточена в его положительно заряженном ядре, причем масса ядра M в тысячи раз превышает массу отрицательно заряженного электрона m (электрон уже открыт, и заряд его измерен, он равен $e = -4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГСЕ = $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл); во-вторых, внутри атома (на расстояниях порядка $1\ \text{Å} = 10^{-8}$ см) действует закон Кулона.

Итак, мы знаем, что внутри атома, состоящего из тяжелого ядра – протона и легкого электрона, для простоты ограничимся атомом водорода, действует закон Кулона. Кроме того, известно (было известно и в доквантовую эру!), что все атомы водорода одинаковы, т.е. имеют одинаковые размеры порядка 10^{-8} см. Обозначим размер атома водорода через a_0 и постараемся понять: почему $a_0 \sim 10^{-8}$ см? Для этого выразим a_0 через характеристики составных частей атома – заряд e и массы электрона m и протона M. Массу протона, по-видимому, можно исключить, считая, что протон покоится, а электрон движется вокруг него (в действительности обе частицы движутся вокруг общего центра масс, но поправки, связанные с этим, весьма малы). Остаются величины m и e. Но легко проверить (проверьте!), что из них нельзя «построить» комбинацию размерности длины.

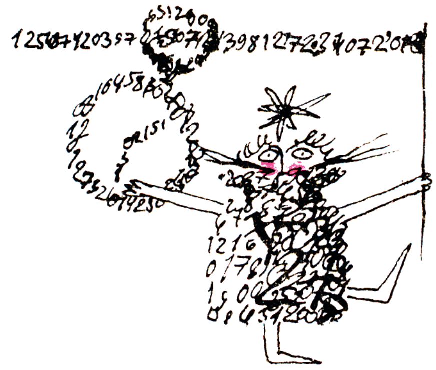
Вывод таков: классическая физика не может установить «природу» размеров атома. К этому, в настоящее время хорошо известному, выводу можно прийти и другими путями. И известен «выход из положения». Его обеспечила квантовая, или атомная, механика. Не входят в нашу задачу рассказывать о квантовой механике в этой статье. Напомним только, что квантовая механика ввела в физику новую мировую константу – постоянную Планку $\hbar \sim 10^{-27}$ г$\cdot$см^2/с, и вернемся к атому водорода. В нашем распоряжении теперь три величины m, e и $\hbar$, а из них легко построить величину размерности длины:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0{,}4 \cdot 10^{-8}\ \text{см}. \qquad (3)$$

Мы без оговорок приравняли выведенную комбинацию размеру a_0, так как с хорошей точностью она действительно равна размеру атома водорода.

Теперь несколько серьезнее задумаемся о логике вывода формулы (3). Не решая задачи, не задумываясь над тем, какими уравнениями описывается движение электрона в атоме, только зная, какие величины (a_0, e, $\hbar$, m) должны входить в неизвестное уравнение, мы решаемся сделать вывод, зафиксированный формулой (3). Какие у нас для этого основания?

Ясно, что уравнение, которое нам придется решать для определения размера атома, будет содержать в виде



неизвестной величины x безразмерную[4] комбинацию, т.е. $x = a_0 me^2/\hbar^2$, а величина x должна быть найдена путем решения какого-то уравнения, скажем $f(x) = 0$. Но откуда у нас уверенность, что корень этого уравнения порядка единицы? Ведь легко себе представить, что x_0 – корень уравнения $f(x_0) = 0$ – какое-нибудь огромное или, наоборот, очень маленькое число. А тогда $a_0 = x_0\hbar^2/(me^2)$ либо значительно больше, либо значительно меньше истинных размеров атома; т.е., попросту говоря, ничего о размере атома мы сказать не можем. Здесь нас выручают интуиция, привычка, опыт. В большинстве случаев искомый корень уравнения действительно оказывается порядка единицы, и тогда наши соображения, основанные на анализе размерности, подтверждаются точным расчетом.

Но бывает и иначе.

В моей практике встретился такой случай. С моим учителем И.М.Лифшицем мы теоретически исследовали свойства вещества, в котором происходят деления радиоактивных ядер (свойства тепловыделяющих элементов реактора). Это непростая задача – выяснить, как влияют на свойства тела происходящие в нем (в случайных местах, в случайные моменты времени!) радиоактивные распады. Но оказалось, что, зная энергию, которую несут осколки ядер, можно воспользоваться соображениями размерности и оценить (прикинуть) результат сравнительно просто. Интуиция подсказала, что результат следует проверить точным расчетом. Оказалось, точное значение отличается от оценки (прикидки) множителем $(2\pi)^{-5} \approx 10^{-4}$ (!). Я думаю, что если бы точный расчет был более сложен, чем это было в действительности, и нам пришлось бы ограничиться оценками, то мы в конце концов нашли бы (и без расчета) множитель $(2\pi)^{-5}$ – ведь его появление отнюдь не случайность…

А вот другой, можно сказать противоположный, пример. И.М.Лифшиц и А.В.Погорелов (вы знаете А.В.Погорелова как автора учебника и книг по геометрии) исследовали закономерности деления тяжелых ядер. Аналогия с каплями обычной жидкости и сообра-

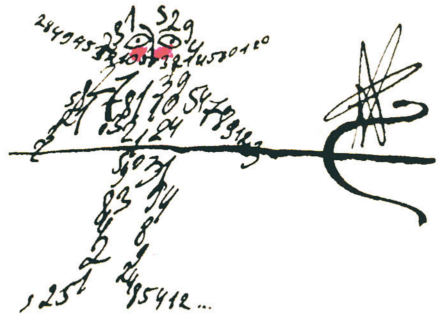
[4] *Сколько-нибудь сложная функция, аргумент которой – размерная величина, вообще бессмысленная вещь. Ведь, как правило, функция задается рядом. Например,* $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$ *А складывать можно только величины одной размерности.*

жения размерности помогли сравнительно просто решить задачу и получить ответ с точностью до безразмерного множителя. Авторам хотелось думать, что неизвестный безразмерный множитель близок к единице (насколько я помню, И.М.Лифшиц был в этом уверен). А.В.Погорелов сконструировал специальный прибор, позволяющий с помощью «обычной» жидкости измерить ту величину, которую оценили теоретически. Оказалось, что искомый множитель равен 1,1 (!).

Что следует из этих двух примеров? Только то, что надо проявлять осторожность при оценках, основанных на соображениях размерности. Проявлять осторожность, но ни в коем случае не отказываться от методов, основанных на этих соображениях.

Когда речь идет об области физики, занимающейся такими явлениями, для понимания которых достаточно использовать известные законы природы (т.е. они описываются с необходимой точностью известными уравнениями), методы размерности служат наводящими соображениями, подспорьем интуиции. С большими или меньшими трудностями можно произвести соответствующий расчет и получить точный ответ. Соображения размерности приобретают особую роль, когда физик выходит в непознанную область, когда нет строгих уравнений, на которые можно опереться, и можно только прикидывать, оценивать и угадывать. Эта деятельность физиков-теоретиков требует особого чутья, основанного на глубоком знании всей структуры физики, на понимании того, что можно подвергать сомнению (пересмотру), а что незыблемо, отказ от чего разрушает (буквально) все здание физики. Наука значительно более консервативна, чем кажется тем, кто смотрит на нее со стороны и восхищается ее успехами, кому кажется, что наука все может и что ей все доступно. Наука описывает реально существующий Мир, управляемый реально существующими законами. Эти законы наука постепенно, в мучительных поисках постигает. Построение логически непротиворечивой картины Мира – столь сложная задача, что надо с трепетной осторожностью относиться к каждой детали этой картины, непрестанно задавая себе вопрос: не нарушу ли я что-то во всей картине, если предположу нечто новое, необходимое (как мне кажется) для объяснения какого-то факта?

Я понимаю, что последний абзац выглядит совершенно абстрактным. И все же не хочу приводить примеры – главным образом потому, что не чувствую себя специалистом в той физике, из которой эти примеры следовало бы черпать: из физики элементарных частиц, из космологии. Хочу только обратить внимание на следующее. Одну и ту же размерность имеют совершенно различные величины: расстояние между Москвой и Нью-Йорком и размер атома водорода, время обращения Нептуна вокруг Солнца и период колебаний атомов в молекуле водорода, масса протона и масса электрона и т.д. и т.п. – примеры можно множить до бесконечности. Разделив размерную величину на величину той же размерности, мы получим безразмерное число. Можно задать вопрос: почему получилось именно это число, а не какое-нибудь другое? Ясно, что так



как число отношений бесконечно, то и число вопросов тоже бесконечно. Надо ли все их задавать? И нужно ли на них отвечать? Ответ дает только опыт. Опыт отдельного человека и опыт всей физики. В ходе развития науки перечень вопросов изменяется вместе с перечнем ответов на них, причем, естественно, вопросы несколько опережают ответы, правда, опережают не слишком значительно. Дело в том, что правильно сформулированный вопрос, как правило, несет в себе ответ. Иногда вопрос выглядит совершенно невинным, а ответ на него очень сложен. Чего уж проще: почему отношение массы протона M_p к массе электрона m_e равно 1838? А ответ на этот вопрос, насколько я знаю, не известен. Или другое знаменитое число – так называемая постоянная тонкой структуры $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$. Постоянную тонкой структуры так и называют – одна сто тридцать седьмая! Почему $1/137$ – современная наука даже не формулирует. Но использует α многократно. Относительная малость заряда ($e^2 = \hbar c/137 \ll \hbar c$) приводит буквально к бесконечному числу следствий.

Числа 137 и тем более 1838 – значительно больше единицы. Могут ли они быть следствием теории, корнем какого-либо уравнения? А ведь можно указать пример, который приводит к буквально астрономическому числу. Отношение силы электростатического отталкивания друг от друга двух протонов к силе гравитационного притяжения между ними: $e^2/\left(M_p^2 G\right)$, конечно, безразмерное число. Оно равно 10^{36} (!). Решая какое уравнение, можно надеяться получить такое фантастическое число? Сейчас делается попытка построить суперфизику, объединяющую все взаимодействия между частицами. По-видимому, она – эта будущая наука – должна «выдать» в виде ответа это грандиозное число. Возможно, правда, в этом не будет ничего удивительного: просто (?!) искомой величиной будет не само отношение сил, а, скажем, $\ln\ln\left(e^2/\left(M_p^2 G\right)\right) \approx 4{,}4$. Но это уже не соображение, а фантазирование… А я хотел бы предостеречь читателя от различных неоправданных сравнений величин одной размерности и обнаружения каких-то мистических соотношений. Попытка ответить на вопрос, чему должно быть равно то или другое отношение двух размерных физических величин, должна основываться на глубоком знании предмета. Озарение здесь не поможет – поверьте мне!

О современной математике и ее преподавании

Лекция на съезде учителей математики

С.СМИРНОВ

Дорогие коллеги, очень приятно выступать перед учителями математики, перед единомышленниками. Организаторы съезда попросили меня рассказать о связи современной математики со школой и университетом. Я подумал и решил, что немного поговорю о современной математике и совсем-совсем немножко о ее преподавании, потому что здесь сложно сказать что-то новое за отведенное время.

Мне повезло: меня очень хорошо учили математике и в школе, и в кружках, и потом в университете. И, пожалуй, единственное, что в школе мне не объяснили, – что математика – это такая же живая наука, как, скажем, физика или биология, что она продолжает развиваться. Потому что от школьных уроков часто создается впечатление, что Пифагор, Евклид, Эйлер все уже доказали, хотя это совсем не так. Математика бурно развивается и сегодня. Решаются очень старые задачи – совсем недавно были доказаны великая теорема Ферма и гипотеза Пуанкаре. При этом задач не становится меньше: решение старых ведет к постановке новых, часто не менее интересных. Появляются новые задачи на волне сотрудничества с физикой, которое исторически всегда было очень тесным, а теперь быстро растет сотрудничество и с другими науками – наверное, надо выделить экономику и биологию. И у математики по-прежнему очень много практических применений. Часто говорят, что математика – фундаментальная наука, поэтому ее нужно поддерживать, но практические применения приходят через десятки, а то и сотни лет. Действительно, математика очень важна как фундаментальная наука, однако и практические применения фундаментальных разработок часто не заставляют себя ждать. В обыденных предметах применяются многие новейшие математических исследования, просто мы редко задумываемся об этом.

Возьмем хотя бы мобильный телефон. В современных аппаратах часто внутри две или три антенны. Они находятся на расстоянии сантиметра друг от друга, поэтому принимают сигнал чуть по-разному. Сравнивая эти различия, удается уменьшать помехи и делать так, чтобы мобильный телефон лучше принимал, чем 10 лет назад. Эти разработки требуют решения математических задач про уравнения в частных производных, которые интересны и сами по себе. Или другая, более очевидная задача: в большинстве современных стандартов разговоры передаются не в аналоговом, а в цифровом режиме, где сигнал кодируется в последовательность нулей и единиц. Основная цель – даже не чтобы не смогли перехватить и раскодировать (это тоже важно, но пока с этим дело у мобильных телефонов обстоит не очень хорошо), а чтобы даже при наличии небольших помех на линии можно было восстановить изначальный сигнал без ошибок. И опять же – это чисто математическая задача, связанная с современными фундаментальными исследованиями.

То есть математика продолжает активно развиваться, и, будучи самой фундаментальной из наук, все равно (а может, именно поэтому) имеет много практических применений. Интересно, что, несмотря на бурное развитие в последние двести лет, задачи математики не стали более заумными. Ну... скажем так, – не все стали более заумными. Конечно, многое меняется, новые понятия вводятся на базе старых, все стало сложнее, чем в XIX веке. Но при этом по-прежнему есть задачи, которые можно объяснить на пальцах школьнику, если уж не решения, то формулировку.

И я решил, что немножечко поговорю об одной задаче, с которой я сам был связан, где действительно формулировку довольно-таки просто объяснить хорошему старшекласснику. Опять же, это хороший пример того, как работают современные математики и как проходит взаимодействие с другими науками.

История началась с нескольких задач, которые поставили перед нами физики-экспериментаторы, а именно – с того, что они действительно наблюдали в природе. На рисунке 1 изображена компьютерная модель эрозии, изначально же похожие формы наблюдали в реальных ситуациях. Вот, скажем, лесные пожары, – когда у вас выгорает кусок леса, то граница его становится фракталом[1], причем экспериментально (не волнуйтесь – лес никто специально не поджигал!) ученые обнаружили, что обычно это фракталы размерности $4/3$. То же самое с фронтами эрозии или просачиванием жидкости через пористую среду. Дол-

Автор статьи – российский и швейцарский математик, лауреат премии Филдса 2010 года. Сейчас работает в Женевском университете и Санкт-Петербургском государственном университете.

Видеозапись лекции доступна в Интернете по адресу http://www.youtube.com/watch?v=T41khOsiJwU

[1] *Подробнее о фракталах можно прочитать в статьях И.М.Соколова «Фракталы» («Квант» № 5 за 1989 год) и Н.П.Долбилина «Игра «Хаос» и фракталы» («Квант» №4 за 1997 год). (Прим. ред.)*

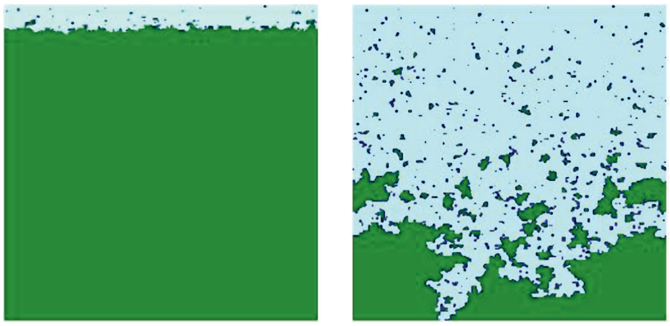


Рис. 1. Компьютерное моделирование эрозии, выполненное физиками Б.Саповалом, А.Балдассари и А.Габриэлле

гое время оставалось загадкой – почему именно так, почему число $4/3$ появляется и в природе, и в численных экспериментах на компьютере. Совсем недавно ряд наших с коллегами работ привел к строгому доказательству: последняя статья на эту тему была написана в прошлом году и вышла в этом.

Но прежде чем доказывать теоремы, надо попытаться сформулировать правдоподобную математическую модель наблюдаемого явления и понять, будет ли она достаточно близка к природной – скажем, проведя численные эксперименты. В случае с эрозией физиками и математиками было предложено несколько связанных между собой моделей. Я опишу, пожалуй, самую простую.

Нам нужна модель какой-то случайной пористой среды, чтобы обсуждать, как через нее будет просачиваться жидкость (или как лес будет гореть). Скажем, можно считать, что на рисунке 2 белые шестиугольники – это дырки в желтом камне. Дырки распределены случайно: для каждого шестиугольника мы подкидываем монетку; выпал орел – красим в желтый цвет, выпала решка – красим в белый. Вода может просачиваться по дыркам, перетекая из белого шестиугольника в соседние белые шестиугольники, и т.д. Эту модель называют *перколяцией*, она была предложена и с успехом использовалась для моделирования многих явлений – от просачивания воды через пористый камень до распространения эпидемий или информации. Самый простой вопрос: с какой вероятностью вода сможет протечь, т.е. каков процент картинок с «пробоем» из белых шестиугольников, идущим сверху вниз через прямоугольник? Или как в среднем выглядит участок, в который может протечь вода? Как может выглядеть регион леса, который сгорит?

Даже рассматривая одну картинку, видишь, что задача не так проста. Например, на рисунке 2,*а* довольно-таки просто заметить, что вода сверху вниз проте-

а)

б)

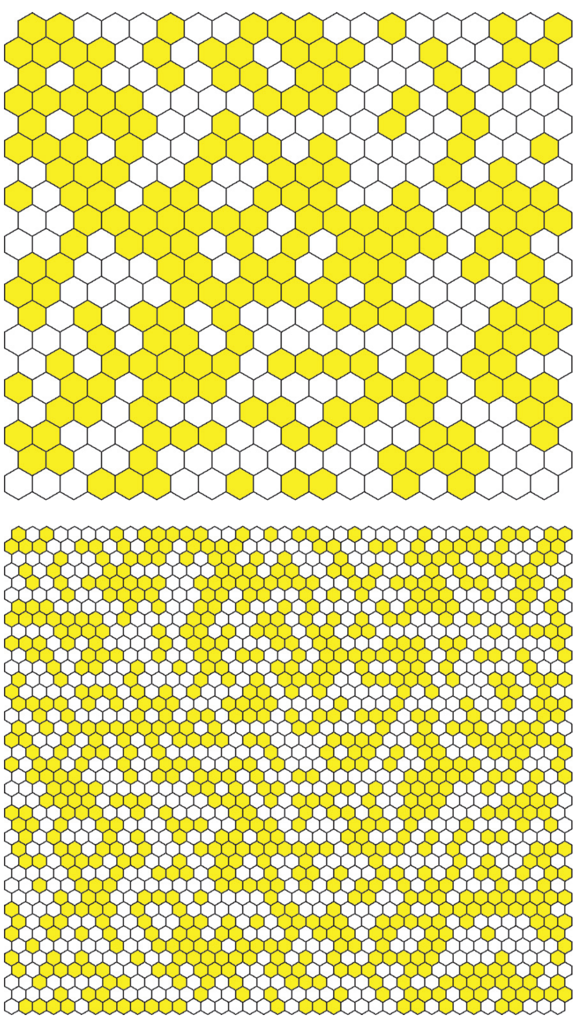


Рис. 2

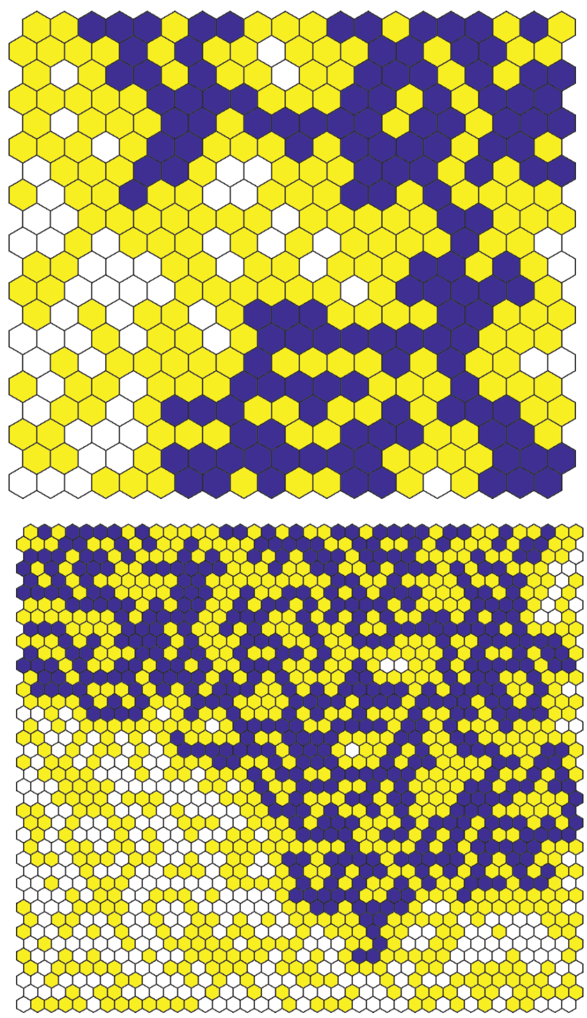


Рис. 3

чет. А на картинке 2,*б*? Немножко посмотрите, и станет ясно, что это гораздо сложнее, даже если у вас хорошие глаза. Почему? Посмотрите на рисунок 3 – здесь в синий цвет окрашены шестиугольники, куда вода может дотечь сверху. Оказывается, что траектории воды – тропинки из белых шестиугольников, окрашенные теперь в синий, – это очень сложные множества, фракталы размерности $4/3$.

У слова *фрактал* нет строгого определения, обычно их определяют как множества дробной размерности с дополнительными свойствами самоподобия (т.е. маленький кусок похож на гомотетичную копию всего множества). Что такое фракталы размерности $4/3$ в этой дискретной ситуации? Если множество размерности 1 (скажем, гладкая кривая) проходит через квадрат или куб со стороной 1000, то оно пересекает примерно 1000 квадратиков 1×1. Множество размерности 2 (например, гладкая поверхность) – примерно 1000^2 квадратиков. А размерности $4/3$ – примерно $1000^{4/3}$. То есть в нашем случае кривая, по которой вода сможет пересечь квадрат шириной 1000, будет состоять в среднем из примерно $1000^{4/3} = 10000$ шестиугольников. Значит, если вода может протечь, то ее траектория будет в 10 раз длиннее стороны квадрата. Таким образом, ее путь будет очень, очень извилистым, и поэтому его сложно отследить. В строгом определении надо брать квадрат со стороной N, брать все возможные раскраски шестиугольников и смотреть, сколько в среднем шестиугольников в самом левом пробое: оказывается, примерно $N^{4/3}$. То есть пробой будет отличаться от прямого пути в $N^{1/3}$ раз – с увеличением размера квадрата все больше и больше, и увидеть его будет становиться еще сложнее и сложнее (рис. 4). И это строгая теорема, которую мы доказали с коллегой из Франции Венделеном Вернером, лауреатом премии Филдса 2006 года. Мы решили задачу, поставленную физиками, но оказалось, что первыми ее поставили математики, просто про это успели забыть! Более того, ее поставили в журнале для школьников и учителей математики, американском родственнике «Кванта» – в журнале «American Mathematical Monthly», в первый год ее издания – 1894, более века назад. Этот журнал и сейчас популярен, его издает Математическая ассоциация Америки – объединение учителей и просто любителей математики. Там есть примерно такая же серия, как «Задачник «Кванта», только иногда предлагаются задачи, где решение неизвестно. Порой они оказываются очень сложными и ведут к интересным математическим теориям – так, например, случилось и с задачей о росте групп, поставленной Джоном Милнором в 1968 году и решенной Р.И. Григорчуком в 1984 году.

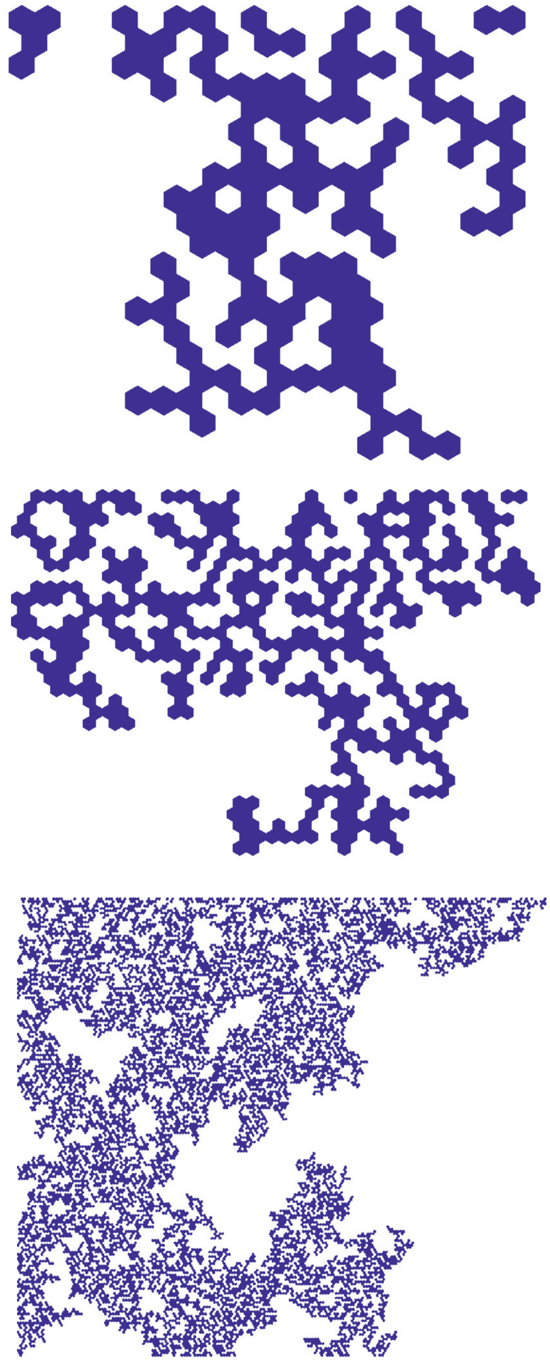
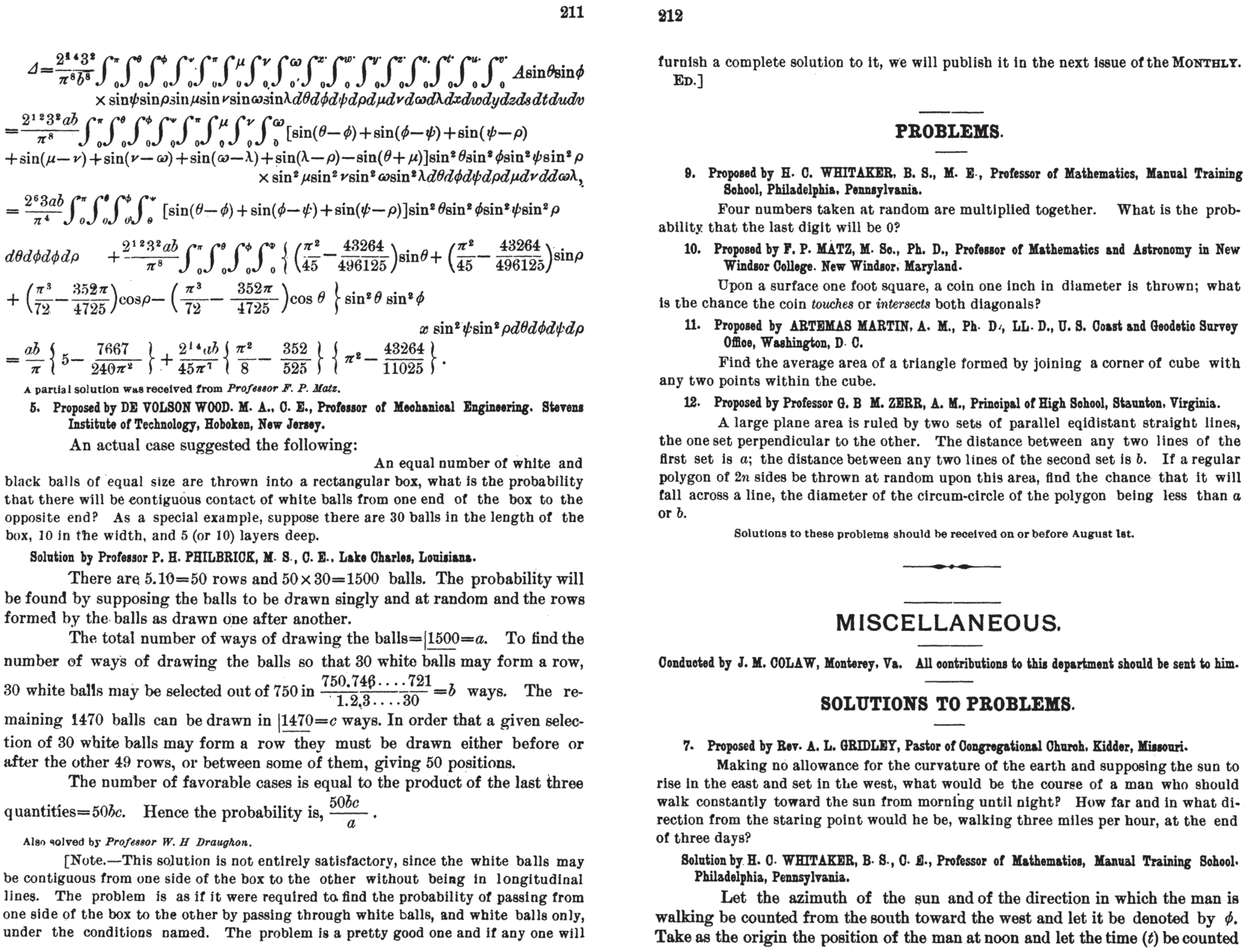


Рис. 4

На рисунке 5 воспроизведены две страницы «American Mathematical Monthly» из выпуска 1894 года с задачей про перколяцию и предложенным решением. Наверху первой страницы – предыдущая задача со страшными повторными интегралами, и немного странно ее видеть в журнале для учителей, но в XIX веке мода была другая. А в середине страницы начинается задача: если в коробку положить случайным образом шары двух цветов... – звучит как обычная задача из теории вероятности про двух мудрецов, которые их оттуда таскают. Но спрашивают в ней то же, что и раньше: какова тогда вероятность, что есть цепочка шаров от одной границы до другой? Интересно, что было опубликовано решение, которое считало вероятность существования прямой цепочки, – а я уже сказал, что если цепочка есть, то она обычно извилистая, – и даже это было сделано неправильно. Но зато редактор написал: если кто-то предложит верное решение, то даже если оно длинное, мы его опубликуем в следующем номере. К сожалению, верное решение пока есть только для двумерной коробки, и то нам понадобилось сто лет, чтобы его придумать!



211

$$\varDelta=\frac{2^{14}3^2}{\pi^8b^8}\int_0^\pi\int_0^\theta\int_0^\phi\int_0^\psi\int_0^\pi\int_0^\mu\int_0^\nu\int_0^\omega\int_0^{x}\int_0^{w}\int_0^{y}\int_0^{z}\int_0^{s}\int_0^{t}\int_0^{u}\int_0^{v}A\sin\theta\sin\phi$$
$$\times\sin\psi\sin\rho\sin\mu\sin\nu\sin\omega\sin\lambda\, d\theta d\phi d\psi d\rho d\mu d\nu d\omega d\lambda dx dw dy dz ds dt du dv$$
$$=\frac{2^{12}3^2ab}{\pi^8}\int_0^\pi\int_0^\theta\int_0^\phi\int_0^\psi\int_0^\pi\int_0^\mu\int_0^\nu\int_0^\omega[\sin(\theta-\phi)+\sin(\phi-\psi)+\sin(\psi-\rho)$$
$$+\sin(\mu-\nu)+\sin(\nu-\omega)+\sin(\omega-\lambda)+\sin(\lambda-\rho)-\sin(\theta+\mu)]\sin^2\theta\sin^2\phi\sin^2\psi\sin^2\rho$$
$$\times\sin^2\mu\sin^2\nu\sin^2\omega\sin^2\lambda\, d\theta d\phi d\psi d\rho d\mu d\nu dd\omega\lambda,$$
$$=\frac{2^6 3ab}{\pi^4}\int_0^\pi\int_0^\theta\int_0^\phi\int_\theta^\psi[\sin(\theta-\phi)+\sin(\phi-\psi)+\sin(\psi-\rho)]\sin^2\theta\sin^2\phi\sin^2\psi\sin^2\rho$$
$$d\theta d\phi d\phi d\rho\quad+\frac{2^{12}3^2ab}{\pi^8}\int_0^\pi\int_0^\theta\int_0^\phi\int_0^\Phi\Big\{\Big(\frac{\pi^2}{45}-\frac{43264}{496125}\Big)\sin\theta+\Big(\frac{\pi^2}{45}-\frac{43264}{496125}\Big)\sin\rho$$
$$+\Big(\frac{\pi^3}{72}-\frac{352\pi}{4725}\Big)\cos\rho-\Big(\frac{\pi^3}{72}-\frac{352\pi}{4725}\Big)\cos\theta\Big\}\sin^2\theta\sin^2\phi$$
$$x\sin^2\psi\sin^2\rho d\theta d\phi d\psi d\rho$$
$$=\frac{ab}{\pi}\Big\{5-\frac{7667}{240\pi^2}\Big\}+\frac{2^{14}ab}{45\pi^7}\Big\{\frac{\pi^2}{8}-\frac{352}{525}\Big\}\Big\{\pi^2-\frac{43264}{11025}\Big\}.$$

A partial solution was received from *Professor F. P. Matz.*

5. Proposed by DE VOLSON WOOD. M. A., C. E., Professor of Mechanical Engineering. Stevens Institute of Technology, Hoboken, New Jersey.

An actual case suggested the following:

An equal number of white and black balls of equal size are thrown into a rectangular box, what is the probability that there will be contiguous contact of white balls from one end of the box to the opposite end? As a special example, suppose there are 30 balls in the length of the box, 10 in the width, and 5 (or 10) layers deep.

Solution by Professor P. H. PHILBRICK, M. S., C. E., Lake Charles, Louisiana.

There are $5.10=50$ rows and $50\times30=1500$ balls. The probability will be found by supposing the balls to be drawn singly and at random and the rows formed by the balls as drawn one after another.

The total number of ways of drawing the balls$=\underline{|1500}=a$. To find the number of ways of drawing the balls so that 30 white balls may form a row, 30 white balls may be selected out of 750 in $\dfrac{750.746\ldots.721}{1.2,3\ldots.30}=b$ ways. The remaining 1470 balls can be drawn in $\underline{|1470}=c$ ways. In order that a given selection of 30 white balls may form a row they must be drawn either before or after the other 49 rows, or between some of them, giving 50 positions.

The number of favorable cases is equal to the product of the last three quantities$=50bc$. Hence the probability is, $\dfrac{50bc}{a}$.

Also solved by *Professor W. H Draughon.*

[Note.—This solution is not entirely satisfactory, since the white balls may be contiguous from one side of the box to the other without being in longitudinal lines. The problem is as if it were required to find the probability of passing from one side of the box to the other by passing through white balls, and white balls only, under the conditions named. The problem is a pretty good one and if any one will

212

furnish a complete solution to it, we will publish it in the next issue of the MONTHLY. ED.]

PROBLEMS.

9. Proposed by H. C. WHITAKER, B. S., M. E., Professor of Mathematics, Manual Training School, Philadelphia, Pennsylvania.

Four numbers taken at random are multiplied together. What is the probability that the last digit will be 0?

10. Proposed by F. P. MATZ, M. Sc., Ph. D., Professor of Mathematics and Astronomy in New Windsor College. New Windsor, Maryland.

Upon a surface one foot square, a coin one inch in diameter is thrown; what is the chance the coin *touches* or *intersects* both diagonals?

11. Proposed by ARTEMAS MARTIN, A. M., Ph. D., LL. D., U. S. Coast and Geodetic Survey Office, Washington, D. C.

Find the average area of a triangle formed by joining a corner of cube with any two points within the cube.

12. Proposed by Professor G. B M. ZERR, A. M., Principal of High School, Staunton, Virginia.

A large plane area is ruled by two sets of parallel eqidistant straight lines, the one set perpendicular to the other. The distance between any two lines of the first set is a; the distance between any two lines of the second set is b. If a regular polygon of $2n$ sides be thrown at random upon this area, find the chance that it will fall across a line, the diameter of the circum-circle of the polygon being less than a or b.

Solutions to these problems should be received on or before August 1st.

MISCELLANEOUS.

Conducted by J. M. COLAW, Monterey, Va. All contributions to this department should be sent to him.

SOLUTIONS TO PROBLEMS.

7. Proposed by Rev. A. L. GRIDLEY, Pastor of Congregational Church, Kidder, Missouri.

Making no allowance for the curvature of the earth and supposing the sun to rise in the east and set in the west, what would be the course of a man who should walk constantly toward the sun from morning until night? How far and in what direction from the staring point would he be, walking three miles per hour, at the end of three days?

Solution by H. C. WHITAKER, B. S., C. E., Professor of Mathematics, Manual Training School. Philadelphia, Pennsylvania.

Let the azimuth of the sun and of the direction in which the man is walking be counted from the south toward the west and let it be denoted by ϕ. Take as the origin the position of the man at noon and let the time (t) be counted

Рис. 5

Это – хороший пример того, как из чистого любопытства математики задали вопрос, который оказался очень интересным и с точки зрения физиков-экспериментаторов. Потом задачей заинтересовались и физики-теоретики. И выяснилось, что проблематика связана не только с изучением пористых сред, но и с, казалось бы, более далекой областью – квантовой теорией поля. Интуиция, пришедшая оттуда, подсказала две вещи.

Первая идея состоит в том, что нужно изучать эту модель, когда размер шестиугольников стремится к нулю. В реальной ситуации, если вы изучаете, скажем, лес, то размер дерева гораздо меньше, чем размер леса. Или вы изучаете какой-то камень – тогда размеры пор гораздо меньше размера камня. Разница настолько велика, что в некоторых ситуациях физики формально полагают размер меньших объектов равным нулю. А с точки зрения математика нужно сказать, что мы изучаем задачу на решетке, где размер шестиугольника стремится к нулю. Это то же самое, что фиксировать размер шестиугольника и брать все большие и большие картинки, как мы писали вначале, но гораздо удобнее ремасштабировать картинку, чтобы она имела фиксированный размер, а шестиугольники, напротив, становились все меньше. Это и происходит на рисунке 4, и с таким подходом мы можем говорить о предельной модели, когда шаг решетки равен нулю – ее мы и попытались изобразить на последней картинке. Если бы мы оставили все шестиугольники, то получилась бы хаотичная раскраска плоскости в два цвета (которую и определить-то трудно), поэтому мы оставили только один связный синий регион – как говорят, *кластер*, – по которому может протечь вода. Так вот, надо изучать множества вроде таких предельных кластеров. Это тоже фрактальные множества, и мы доказали, что их размерность $91/48$. И если $4/3$ может как-то просто получиться, то $91/48$ уже наводит на мысль, что происходит что-то сложное.

Вторую идею физики называют *универсальностью* – какую бы решетку мы ни взяли, все равно предельный объект получился бы тем же самым (хотя дискретные модели были бы разными), и описывается квантовой теорией поля. В природе принцип универсальности проявляется во многих явлениях. Скажем, вода замерзает при одной температуре, какая-то другая жидкость – при другой, но сам процесс замерзания очень похож.

В середине восьмидесятых годов прошлого века трое российских физиков из Института теоретической физики им. Л.Д.Ландау – А.А.Белавин, А.М.Поляков и А.Б.Замолодчиков – заметили, что для двумерных, плоских моделей универсальность имеет далеко идущие последствия (трехмерные пока во многом остаются непонятыми математиками и физиками). Оказывается, что предел плоской модели, когда шаг решетки стремится к нулю, должен иметь очень много симметрий. То есть сама шестиугольная решетка имеет немного симметрий: она переходит в себя при параллельном переносе или повороте на 60°, а значит, и модель перколяции при этом тоже сохранится. Но если ее повернуть, скажем, на 10°, то модель станет другой. Подобная модель на квадратной решетке сохраняется при повороте на 90°, но не на 60°. Однако выяснилось, что в пределе модели сохраняются при всех поворотах и, более того, при конформных отображениях. Конформные отображения – это объект из комплексного анализа: отображения, которые являются аналитическими функциями, или, по геометрическому определению, это отображения, которые сохраняют углы между кривыми. В школьном курсе географии, например, упоминается отображение Меркатора – оно сохраняет углы, но меняет расстояния. Пример конформного отображения решетки показан на картинке 6. Замечательное свойство плоскости (в отличии от трехмерного пространства) в том, что таких отображений очень много – скажем, квадрат можно конформно отобразить на круг. А если у какого-то объекта (в данном случае у модели перколяции) очень много симметрий, то про него можно многое сказать.

Так вот, используя эти идеи, Белавин, Поляков и Замолодчиков описали возможные пределы дискретных случайных объектов как «квантовые теории поля с конформными симметриями», которые ведут к очень интересной алгебраической структуре, где и появляются числа вроде $91/48$. Предположительно их теория должна быть применима для всех *критических* моделей, то есть моделей в точке фазового перехода. Если вы, скажем, берете ферромагнитные материалы и смотрите на температуру Кюри, когда пропадает ферромагнетизм. Или меняете плотность дырок в перколяции и ждете момента, когда жидкость начнет просачиваться (на шестиугольной решетке такой момент наступает, когда желтые и белые шестиугольники равновероятны).

Теория конформной инвариантности позволила физикам объяснить наблюдаемые явления, в частности, $4/3$ и $91/48$ перестали быть чисто экспериментальными числами и получили теоретическое обоснование. К сожалению, до математического доказательства было далеко, и даже две упомянутые идеи не были доказаны. Так что задача снова вернулась к нам, к математикам, причем со старой формулировкой столетней давности, которую сформулировали в журнале «American Mathematical Monthly» еще в 1894 году: как посчитать вероятность пробоя. Знаменитый математик Роберт Лэнглендс из Принстона вложил много усилий, пытаясь математически обосновать или хотя бы переформулировать физическую теорию. С двумя коллегами-физиками он провел много компьютерных экспериментов и пришел к выводу, что действительно существует предельная вероятность пробоя (то есть мы берем прямоугольник, накладываем шестиугольную решетку с каким-то шагом, считаем процент раскрасок, при которых есть пробой, а потом шаг устремляем к нулю), она не зависит от решетки и сохраняется при конформных отображениях. Увидев их работу, физик Джон Карди из Оксфорда вывел точную формулу, но не дал строгого доказательства. Получил он ее так: он зафиксировал три вершины прямоугольника и менял позицию четвертой точки, перемещая ее по периметру и получая дифференциальное уравнение. Уравнение простое, но его нельзя решить в полиномах или тригонометрических функциях. Поэтому его решение имеет специальное название – гипергеометрическая функция, оно выглядит довольно сложно и я его не привожу. А потом знаменитый шведский математик Леннарт Карлесон заметил, что если за нашу область взять равносторонний треугольник, то формула становится очень простой. То есть если в равностороннем треугольнике с длиной стороны 1 мы отложим на противоположной стороне отрезок длины l, то тогда вероятность пробоя будет просто сходиться к l (рис. 7), и когда шаг решетки очень маленький, она будет пример-

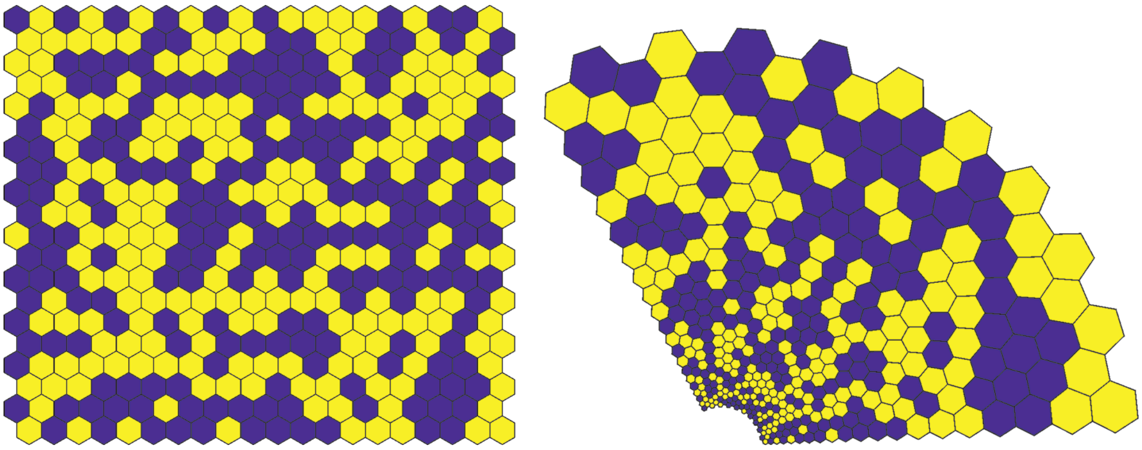


Рис. 6

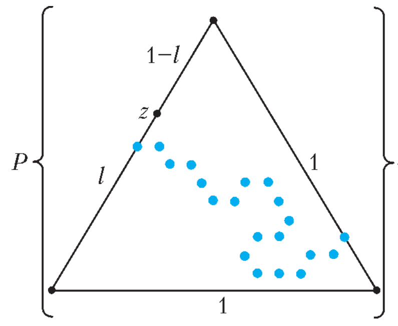


Рис. 7

но равна l. В этом случае, если точка z ездит по стороне, решение уравнения, которое написал Карди, просто линейное.

Эта простая переформулировка имела большое психологическое значение и заинтересовала в задаче многих математиков. Сначала мы пытались строго обосновать подход физиков. Но, как часто случается, оказалось проще придумать новый подход, и физикам он тоже оказался интересен. Мы тоже фиксировали три вершины треугольника и меняли положение четвертой точки z, но разрешили ей двигаться и внутри треугольника. Тогда можно смотреть, есть ли пробой, который отделяет z от базовой стороны. И опять же, в пределе – результат линейный (рис. 8), просто абсцисса y

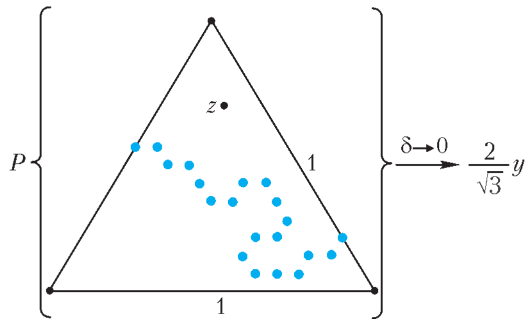


Рис. 8

точки z (только нужно отнормировать так, чтобы в верхней вершине была единица, т.е. умножить на $2/\sqrt{3}$). Идея доказательства на самом деле очень простая. Я вполне мог бы рассказать тут доказательство и даже не всех бы утомил, это заняло бы еще 10 минут, но я лучше не буду. Есть простой комбинаторный аргумент, который говорит, что эта функция от z (приблизительно) гармоническая, то есть в точке z она (примерно) равна среднему арифметическому своих соседей. У вершины шестиугольной решетки соседей будет три. И если мы знаем что-то о поведении гармонической функции на границе, мы потом ее можем восстановить и внутри треугольника, и в нашем случае получается, что функция линейная. Доказательство работает и для других областей, только ответ получается более сложный.

Это пример, когда задачу довольно просто сформулировать. Кстати, интересно, что простая формулировка играет большую роль. Я вначале увидел формулировку Карди, подумал над ней три дня, и стал

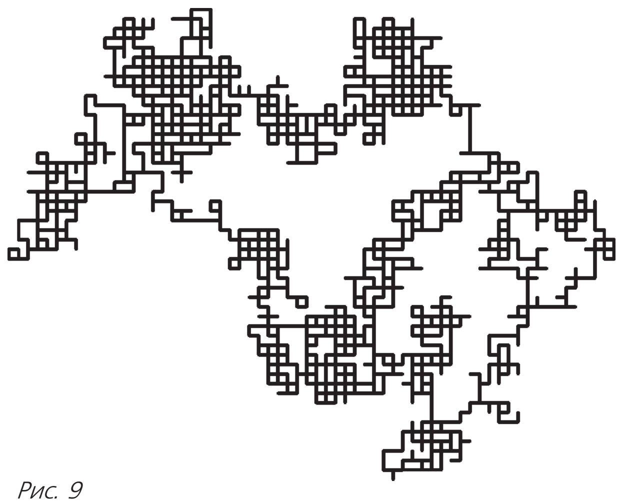
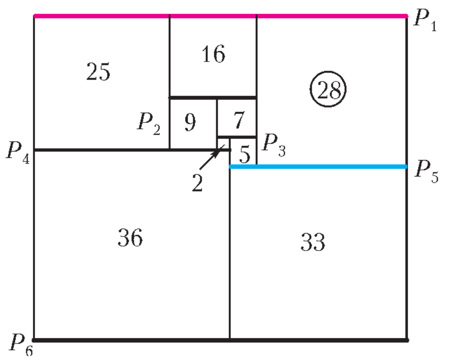


Рис. 9

заниматься чем-то другим. А потом Карлесон рассказал свою переформулировку, и после этого я уже думал полгода и получилось.

Другая интересная черта перколяции в том, что она связана со многими другими явлениями, даже из классической науки, которую проходят в школе. Есть случайный процесс, который упоминается в курсах биологии и физики, – броуновское движение (рис. 9). Роберт Браун, шотландский ботаник, открывший ядро клетки, в 1827 году увидел в микроскоп хаотическое движение маленьких частичек внутри зернышек пыльцы. И он тогда очень серьезно к этому подошел. До него многие наблюдали это движение, например, швед Ян Ингенхауз, но Браун серьезно подошел к исследованиям и правильно поставил вопрос. Сначала он очень обрадовался, решив, что открыл источник жизни в растениях. Но потом он решил проверить, есть ли такое движение в неживой материи, и выяснилось, что тоже есть, даже в камнях, давно не соприкасавшихся с живым (Браун даже рассмотрел под микроскопом кусок Сфинкса!). Долгое время это движение оставалось необъясненным, математическая модель была в итоге построена Альбертом Эйнштейном и Норбертом Винером. Причиной оказались беспорядочные удары (невидимых в микроскоп) молекул в частичку, и статья Эйнштейна была одним из первых экспериментальных подтверждений атомного строения материи. В оптический микроскоп нельзя было увидеть молекулу, но можно было увидеть частичку, которая гораздо больше и в которую молекула ударяется, и это движение ведет к случайному блужданию. Каждый удар – это какой-то скачок. Это дискретная модель, ее тоже можно моделировать на решетке. И в пределе, если смотреть издалека и если брать очень маленькие молекулы, это будет непрерывный процесс, который называют броуновским движением или процессом Винера. И опять же, вне зависимости от того, какую мы жидкость возьмем и на какой решетке смоделируем, траектории будут одни и те же. И что самое интересное – есть универсальность даже на уровне связи с перколяцией: у траекторий броуновского движения граница тоже будет размерности $4/3$, и это будет та же самая кривая, что для кластера перколяции. Кластеры разные, а граница одна и та же. Эту гипотезу сформулировал «отец фракталов» Бенуа Мандельброт, а доказали француз Венделен Вернер, американец Грег Лоулер и израильтянин Одед Шрамм – замечательный пример международного сотрудничества!

Я уже сказал, что в перколяции основной инструмент – это гармонические функции, и для броуновского движения они



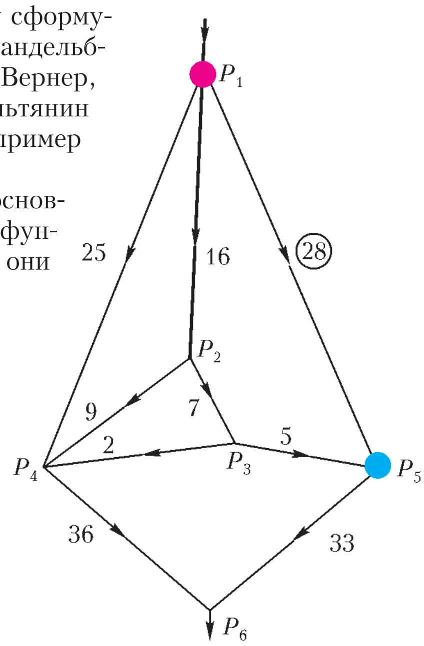


Рис. 10

тоже играют важную роль. На самом деле они появляются и в школьном курсе – их изучают в электростатике в связи с законами Кирхгофа.

В 1847 году Кирхгоф изучал движение тока по цепям и предложил моделировать их графами – вот, скажем, справа на рисунке 10 [2] изображена электрическая цепь и нарисован ток, который по ней течет. Что говорят два закона Кирхгофа? Первый закон Кирхгофа говорит, что в вершину, если там нет источника тока, втекает столько же, сколько вытекает. Например, посмотрим на вершину, обведенную синим, P_5, в нее втекают токи 28 и 5, а вытекает ток 33. А второй закон Кирхгофа говорит, что если вы возьмете какой-то цикл и пройдетесь вдоль него, то суммарный ток будет нулевым (если все сопротивления одинаковые).

Тогда потенциал течения этого тока будет гармонической функцией. Он будет как раз обладать свойством, что значение в каждой точке – это среднее значение по соседям. Очень интересно, что после Кирхгофа математики про гармонические функции на некоторое время забыли, а одной из причин возвращения стала опять же задача для школьников. Она появилась в нескольких сборниках начала XX века, возможно, первым ее сформулировал знаменитый российский математик Н.Н.Лузин, предположив, что квадрат нельзя разбить на квадраты разного размера. На одинаковые квадраты разбить просто, скажем, квадрат 4×4 – на четыре квадрата 1×1. А можно ли разбить на квадраты разного размера? И четыре студента-первокурсника Брукс, Смит, Стоун и Тутте в Тринити-колледж в Кембридже придумали решение в 1940 году. Они стали не квадраты резать ножницами, а искать электрические цепи, придумав соответствие между электрическими цепями и разбиениями квадратов. Как говорится, одна картинка стоит тысячи слов, и их соответствие тоже проще объяснить на примере рисунка 10. Слева – разбиение прямоугольника на квадраты, а справа – электрическая цепь. Горизонтальные отрезки соответствуют вершинам. Вот, скажем, красный отрезок – это красная вершина, синий отрезок – это синяя. А на ребре, соединяющем их, мы пишем длину стороны этого квадрата, т.е. 28. И получается, что разбиение на квадраты дает нам в точности два закона Кирхгофа. Например, в синюю вершину сверху втекают токи 5 и 28, и синей стороны сверху касаются два квадрата размером 5 и 28. А вытекает ток 33 – это нижний квадрат со стороной 33. Вот вам первый закон Кирхгофа. А второй дается вертикальными отрезками: суммы размеров квадратов слева и справа от вертикального отрезка равны, это соответствует тому, что на электрической схеме суммарный ток вокруг грани нулевой.

Поэтому достаточно не квадрат разбить на квадраты, а найти соответствующую цепь, удовлетворяющую законам Кирхгофа. И они нашли пример (рис.11), вопреки ожиданиям Лузина! Опять же интересно, что это задача для школьников, но ее решение заняло 20 лет серьезной работы математиков и привело к гораздо более интересным математическим исследованиям.

Это один только пример из современной математики, и мне опять хочется подчеркнуть – математика сейчас очень активная наука, все ее области взаимосвязаны. Математика очень активно сотрудничает с

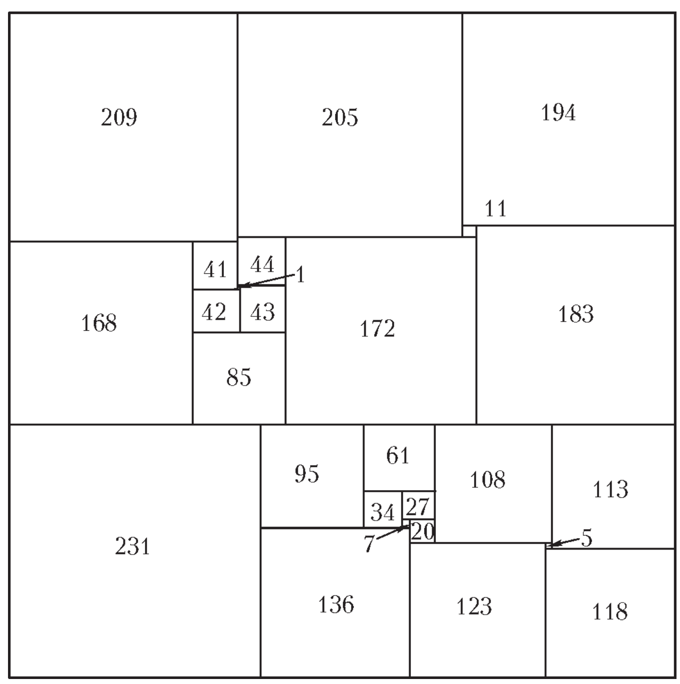


Рис. 11

[2] *Рисунки 10 и 11 взяты из статьи Брукса, Смита, Стоуна и Тутте «Разбиение прямоугольников на квадраты» (Duke Math. J. 7 (1940), p. 312–340).*

физикой, экономикой, биологией и другими науками. Она очень активно применяется в обыденной жизни, хотя часто мы этого не замечаем. Ну и сами по себе чисто математические задачи бывают очень интересными. Более того, до сих пор есть замечательные задачи, которые можно объяснить школьникам. В описанной задаче очень простые правила приводят к сложным и глубоким явлениям – так часто происходит и в природе.

Второе, что я хотел обсудить, – это школьное образование с точки зрения ученого-математика. Я учил и школьников, и студентов во многих странах: в России, в США, в нескольких европейских странах. Подумав, я решил, что об этом я скажу совсем немного. Потому что условия очень разные в разных странах, проблемы кажутся разными. У кого-то есть ЕГЭ, у кого-то нет, скажем, в Америке подобный экзамен тоже есть, а в Швейцарии его нет. У кого-то хорошие школьные традиции, как, скажем, у нас или в Швейцарии, у кого-то похуже, как, скажем, в Америке. Но главная проблема, видимо, одна и та же. Во всех странах хотят сохранить или улучшить свой уровень математического образования. И везде учителя и ученые пытаются объяснить, что математическое образование сейчас очень важно для людей. В России у нас в решении этих проблем есть преимущество. Во второй половине XX века у нас было создано, пожалуй, лучшее математическое образование в мире. И это не только с наших слов, хотя здесь похвастаться не стыдно. Можно спросить, что про наше образование думают европейцы или американцы. Я разговаривал и с учителями математики, и с учеными, которые встречали наших выпускников в 60-е – 70-е годы. Говорят, что на них это производило удручающее впечатление – сколько наш студент или школьник знает по сравнению с американским или французским школьником. У нас были – и сейчас есть – многие элементы, которых в других странах не было вообще. Физико-математические школы, потом – совершенно замечательная внешкольная система, которая сегодня важна как никогда, потому что она может более дифференцированно работать, чем школа, и может охватывать учащихся разного уровня с разными интересами. Здесь все было, многое остается: кружки, заочные математические школы, очень массовые олимпиады – хорошая система отбора заинтересованных школьников. Несомненно, все это нужно сохранить и улучшить.

Когда мы думаем про будущее математического образования, то главный вопрос – зачем и почему мы преподаем математику, что в школе, что в университете. Может быть, это немножко крамольная мысль и ее опасно, не объяснив, говорить учителям других предметов. Но мы, в основном, изучаем геометрию Евклида не затем, чтобы изучать геометрию Евклида. Конечно, она играет важную роль в школьном курсе физики, но большинство людей не будут применять ее в жизни. Основная же цель – это научить человека думать, научить его рассуждать логически, объяснять свою точку зрения. Древние греки выделяли – и это потом прошло через все средневековье – семь свободных искусств, и даже сейчас еще на многих западных факультетах первая степень называется «бакалавр искусств», а не «бакалавр наук». В первых трех свободных искусствах, кроме грамматики, были логика и риторика, то есть умения логически рассуждать и отстаивать свою точку зрения, а среди следующих четырех, помимо музыки и астрономии, присутствовали арифметика и геометрия. Причина столь заметного присутствия математики и близких дисциплин проста: еще древние греки понимали, что для каждого человека важно уметь думать и рассуждать, и математика – это лучший способ этому научиться.

Это было важно в любое время, и сейчас – важно как никогда. То, что именно изучая математику, люди учатся думать, применимо и к школьному, и к университетскому образованию. У меня есть несколько бывших студентов, особенно из американцев, которые работают аналитиками в банках в Нью-Йорке или в Лондоне. И интересно – банки часто предпочитают аналитиками нанимать людей, защитивших кандидатскую диссертацию по математике или теорфизике, а не по финансовым наукам. Как они рассуждают? Эти люди умеют думать и разбираться в сложных вещах, а уж конкретным финансовым вопросам мы запросто научим их на месте. Если же человека не научили думать в университете и в школе, дело поправить уже сложно. Когда я смотрю на своих однокурсников или товарищей по 239-й физико-математической школе, или просто на бывших студентов, покрывается очень большой спектр профессий: от физиков до биологов, от театроведов до теологов, и я не слышал, чтобы кто-то жалел о том, что его учили математике – все говорят, что это помогает независимо от твоих будущих занятий. И даже для самих будущих математиков в школе, видимо, важнее научиться думать, а не выучить какую-то конкретную область. Когда ко мне приходит студент, конечно, хочется какого-то минимального уровня базовых знаний, но умение думать и рассуждать, понимание, что такое доказательство – гораздо важнее.

И поэтому хочется сохранить и повысить уровень математического образования у нас в России, да и вообще в мире, сделать образование более интересным и от этого более эффективным. Не так важно, каким областям мы научим, важно, чтобы ученики научились думать. В России у нас было много уникального, нужно сохранить и улучшить то, что есть особенного и хорошего в нашей системе.

Большое спасибо за внимание! Успехов всем нам, а главное – хороших учеников!

Невозможные замощения

С.ТАБАЧНИКОВ, Д.ФУКС

Введение

Эта статья посвящена замощениям плоских многоугольников при помощи других плоских многоугольников. Вот пример такой задачи, который, вероятно, известен читателю. Из шахматной доски вырезаны две угловые диагонально противоположные клетки (a1 и h8). Можно ли замостить полученную «усеченную» шахматную доску доминошками размера 2×1?

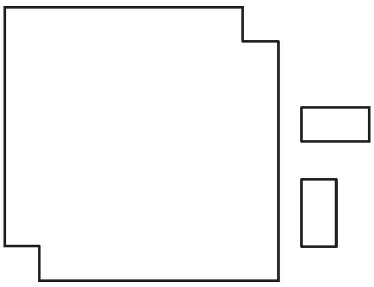


Рис.1. Можно ли замостить доминошками шахматную доску без угловых клеток?

Типичный фрагмент замощения доминошками показан на рисунке 2. Фигурки, составляющие замощение, не перекрываются (они касаются друг друга только по границе), и при этом каждая точка доски принадлежит какой-либо фигурке. Отметим два момента: во-первых, доминошки разрешается класть как вертикально, так и горизонтально; во-вторых, у соприкасающихся доминошек не обязательно должна быть целая общая сторона. Общая постановка задачи о замощении звучит так: если дан многоугольник P и набор многоугольников $Q_1, Q_2, \ldots$, возможно ли замостить P копиями многоугольников Q_i?

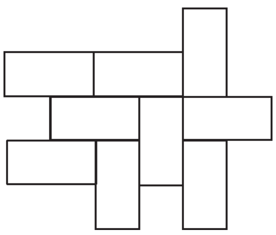


Рис.2. Фрагмент замощения

Читатель, которому не удалось решить задачу о шахматной доске без угловых клеток, сможет прочесть ее (отрицательное) решение в следующем разделе. Далее мы увидим множество других примеров невозможных замощений, но доказательства этой невозможности будут все более и более сложными.

Раскраски

Чтобы решить задачу о шахматной доске с вырезанными углами, вспомним, что поля шахматной доски окрашены в черный и белый цвета. Оба вырезанных диагонально противоположных угла черные, т.е. доска состоит из тридцати черных и тридцати двух белых полей (рис.3). С другой стороны, каждая доминошка размера 2×1 накрывает одно белое и одно черное поле. Значит, такое замощение невозможно.

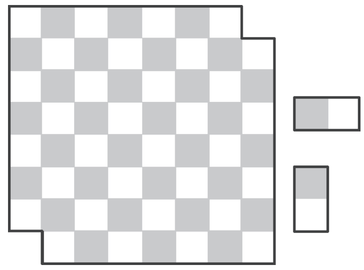


Рис.3. Рассуждение с использованием раскраски

Вот другой способ изложить то же доказательство. Запишем на каждом белом поле нуль, а на каждом черном – единицу. Общая сумма всех чисел на доске с вырезанными углами составляет 30. Но на каждой доминошке написаны как 0, так и 1, и тридцать одна доминошка дает сумму 31, а не 30. Значит, такого замощения не существует.

Вот вариация на ту же тему. *Можно ли замостить квадрат* 10×10 *Г-образными фигурками, изображенными на рисунке 4.* Заметим, что у каждой фигурки может быть восемь различных ориентаций!

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

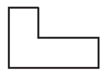


Рис.4. Раскраска по модулю 8

Ответ снова отрицательный. Запишем в клетках квадрата числа 1 и 5, как показано на рисунке 4. Каждая фигурка накрывает либо три единицы и одну пятерку, либо три пятерки и одну единицу. В любом из этих случаев сумма чисел на фигурке кратна 8. С другой стороны, общая сумма чисел на доске равна 300, что на 8 не делится. Значит, такого замощения не существует.

Когда раскраски не помогают

Предположим, что у нас есть два типа фигурок: обычные, положительные, фигурки – и отрицательные фигурки, сделанные из «антивещества». Нам разрешается накладывать фигурки друг на друга, и при этом общие части положительных и отрицательных фигурок взаимно уничтожаются (рис.5). Это можно представить себе по-другому: напишем на каждой положительной фигурке число 1, а на каждой отрицательной число -1. *Кратностью* в точке называется сумма этих ±1 по всем фигуркам, взятая в этой точке.

Рис.5. Фигурки и антифигурки

Из книги: С.Табачников, Д.Фукс. Математический дивертисмент. – М.: МЦНМО, 2011.

Мы будем говорить, что многоугольник допускает *замощение со знаком*, если положительные и отрицательные фигурки можно положить так, чтобы кратность в каждой точке внутри P равнялась 1.

Ясно, что если рассуждение с использованием раскрасок наподобие того, что обсуждалось в предыдущем разделе, доказывает, что многоугольник нельзя замостить некоторым набором фигурок, то из этого же доказательства следует, что замощения со знаком также не существует. Однако бывают задачи, которые имеют решение только для замощений со знаком и неразрешимы для обычных замощений.

Рассмотрим набор точек, расположенных в виде треугольника, как показано на рисунке 6. Мы хотим замостить этот треугольник прямыми плашками, каждая из которых содержит три точки; каждая такая плашка может быть ориентирована одним из трех возможных способов. *Для каких значений n существует такое замощение?*

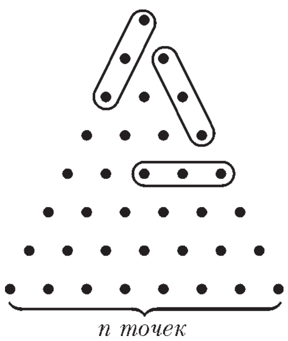


Рис.6. Можно ли замостить этот треугольник плашками из трех точек?

0
1 1
2 2 2
0 0 0 0
1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2
0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2 2 2 2
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Рис.7. Раскраска по модулю 3

Для начала, чтобы такое замощение было возможным, число точек должно делиться на три. Их общее число равно $n(n+1)/2$, и поэтому $n \equiv 0$ или $2 \pmod 3$.

Теперь «раскрасим» точки так, как показано на рисунке 7. Сумма чисел, покрытых одной плашкой, будет тогда кратна трем. Общая сумма зависит от n периодическим образом с периодом 9; ее значения по модулю три равны

$$0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0.$$

Поэтому $n \bmod 9$ должно равняться 1, 8 или 0. Мы уже знаем, что $n \equiv 0$ или $2 \pmod 3$, поэтому остаются только последние два случая.

Покажем, что если $n \equiv 8$ или $0 \pmod 9$, то треугольник из точек можно замостить со знаком при помощи трехточечных плашек. На рисунке 8 такое замощение показано при $n = 8$, а на рисунке 9 изображено, как строить треугольники большего размера из треугольников со стороной 8 и рядов трехточечных плашек.

Из этого получается, что следующую удивительную теорему невозможно доказать каким угодно рассуждением, использующим раскраски.

Теорема 1. *Ни для какого числа n треугольную таблицу точек со стороной n нельзя замостить трехточечными плашками.*

Группа Конвея замощения

Джон Конвей, р.1942

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится некоторая предварительная подготовка. Для начала предположим, что все наши многоугольники: и область, которую мы собираемся замостить, и элементы замощения – нарисованы на клетчатой бумаге и составлены из единичных квадратиков. Также условимся, что ни в каком из этих многоугольников не будет дырок: граница каждого из них будет состоять из единой замкнутой кривой.

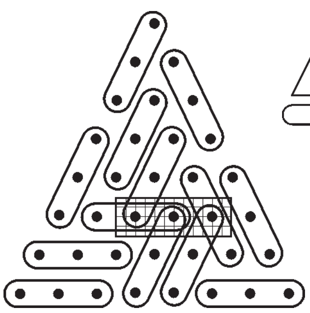


Рис.8. Замощение со знаком при $n = 8$

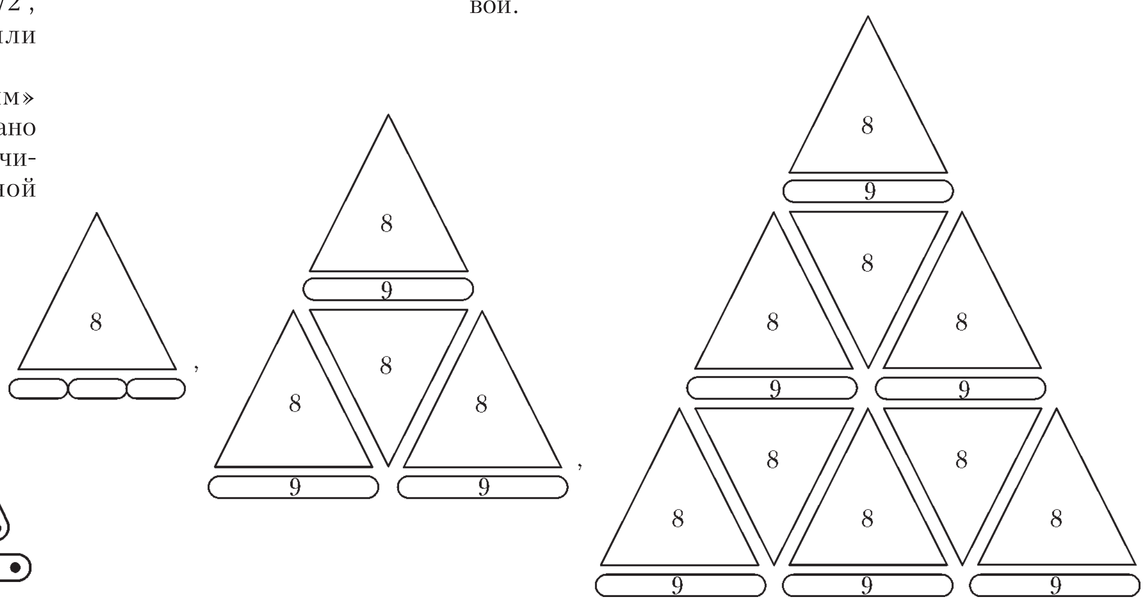


Рис.9. Построение больших замощений со знаком из меньших

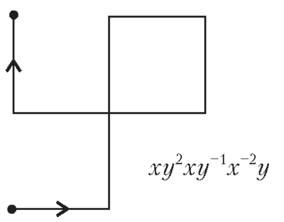


Рис.10. Путь и соответствующее ему слово

Путь на клетчатой бумаге будет описываться словом, составленным из букв четырехбуквенного алфавита x, y, x^{-1} и y^{-1}: шаг вправо обозначается через x, шаг влево – через x^{-1}, шаг вверх – через y, и шаг вниз – через y^{-1}. Пример изображен на рисунке 10. Мы будем записывать k символов x или x^{-1}, идущих подряд, как $x^{\pm k}$; то же самое для y. Тривиальный путь будет обозначаться через e. Также условимся, что идущие подряд символы x и x^{-1} (или y и y^{-1}) сокращаются: например, $xyy^{-1}x^{-1} = e$.

Композиция двух слов a и b будет определяться так: запишем сначала слово a, а потом слово b и сократим в полученном слове все идущие подряд пары, состоящие из x и x^{-1} и из y и y^{-1}. Полученное слово условимся обозначать через ab.

Композиция удовлетворяет закону ассоциативности: $(ab)c = a(bc)$, где через a, b и c обозначены произвольные слова. Слово w^{-1}, обратное к данному слову w, получается так: надо прочитать слово w справа налево и заменить все показатели степеней на противоположные. Например, $\left(xy^{-1}\right)^{-1} = yx^{-1}$. Ясно, что $ww^{-1} = e$.

Пусть $T_1,\ldots,T_n$ – полный набор фигурок, разложенных на клетчатой бумаге во всех возможных ориентациях (например, у доминошки различных ориентаций две, а у Г-образной фигурки – восемь). Выберем на границе фигурки T_i начальную точку и пройдем вдоль границы против часовой стрелки. Полученный замкнутый путь будет соответствовать слову W_i, состоящему из букв x, x^{-1}, y и y^{-1}. Разумеется, это слово будет зависеть от выбора начальной точки.

Пока что единственным имевшимся у нас правилом работы со словами был набор равенств

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e = yy^{-1} = y^{-1}y .$$

Добавим к этому правилу новые равенства: $W_1 = W_2 = \ldots = e$. Эти правила значат, что если одно из слов W_i встречается в более длинном слове, то мы можем заменить его на e, и, наоборот, мы можем вставлять в любом месте любого слова какое-либо из слов W_i. Если слово V_1 может быть получено из слова V_2 последовательным применением этих правил, мы будем называть такие слова эквивалентными и записывать это как $V_1 = V_2$.

Нам нужно еще разобраться с неоднозначностью выбора слова W_i, а именно, с его зависимостью от начальной точки. Пусть p' – другая начальная точка на границе фигурки T_i, и пусть W_i' – слово, полученное в результате прохождения вдоль границы начиная с точки p'.

Лемма. *Имеется равенство* $W_i' = e$.

Доказательство. Пусть слово u кодирует путь из p в p', а слово v – путь из p' в p (рис.11). Тогда $W_i = uv$ и $W_i' = vu$. Поскольку $W_i = e$, то и $uv = e$. Тогда $vu = \left(u^{-1}u\right)\left(vu\right) = u^{-1}u = e$, что и требовалось.

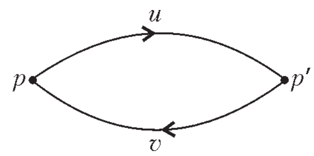


Рис.11. К доказательству леммы

Пусть P – многоугольник. Пройдем вдоль его границы и получим слово U (снова зависящее от начальной точки). Следующее предложение дает необходимое условие для существования замощения.

Предложение. *Если многоугольник P замощен фигурками $T_1,\ldots,T_n$, то $U = e$.*

Доказательство. Индукция по количеству фигурок. Сначала предположим, что P замощен одной фигуркой, скажем, T_i. Тогда слово U равно какому-то из описанных выше W_i', и утверждение следует из леммы.

Теперь предположим, что фигурок несколько. Тогда многоугольник P можно разрезать на два многоугольника P_1 и P_2 при помощи пути, проходящего внутри P из одной точки границы до другой точки границы (назовем эти точки p и p'), причем идти этот путь должен лишь по границам фигурок (рис.12). Пусть w – слово, соответствующее этому пути pp' внутри P, и пусть v_1 и v_2 – слова, соответствующие путям по границе многоугольника P из p в p' и из p' в p соответственно.

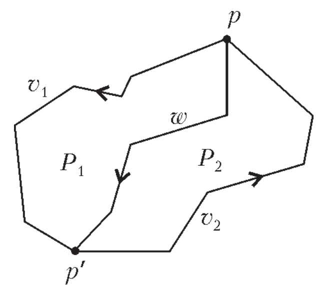


Рис.12. Шаг индукции в доказательстве предложения

Замкнутый путь по границе P против часовой стрелки, начинающийся в точке p, соответствует слову v_1v_2. При этом $v_1v_2 = \left(v_1w^{-1}\right)\left(wv_2\right)$. Слова в скобках соответствуют обходам по границам многоугольников P_1 и P_2. В силу нашего выбора пути pp' эти два многоугольника замощены меньшим количеством фигурок. По предположению индукции, $v_1w^{-1} = e$ и $wv_2 = e$. Поэтому и $v_1v_2 = e$.

Наконец, слово U, соответствующее обходу вдоль границы, может отличаться от v_1v_2 выбором начальной точки. Но мы уже знаем из леммы, что если одно из этих слов эквивалентно e, то и другое тоже эквивалентно. Тем самым доказательство завершено.[1]

Из доказательства предложения видно, что равенство $U = e$ можно получить из равенств $W_1 = W_2 = \ldots = e$ чисто алгебраически, используя правила $xx^{-1} = x^{-1}x = e = yy^{-1} = y^{-1}y$ и ассоциативность. Как может помочь это наблюдение? Если мы хотим доказать, что многоугольник P нельзя замостить фигурками $T_1,\ldots,T_n$, можно пытаться доказать, что равенство $U = e$ из равенств $W_1 = W_2 = \ldots = e$ не следует. При этом уже не обязательно помнить, что x обозначает шаг

[1] *Удобно переформулировать конструкции, описанные в этом пункте, на языке групп. Набор фигурок $T_1,\ldots,T_n$ определяет группу с двумя образующими x и y и с соотношениями $W_1,\ldots,W_n$. Эта группа называется группой Конвея замощения. Граничное слово многоугольника P является элементом группы Конвея замощения, и если P может быть замощен фигурками $T_1,\ldots,T_n$, то этот элемент единичный.*

влево, и т.д. Более того, можно придать буквам x, y, x^{-1} и y^{-1} новый смысл – лишь бы оставались верными равенства $W_1 = W_2 = \ldots = e$ и работали вышеуказанные правила. Например, в качестве x, y, возможно, подойдут числа, повороты плоскости, перестановки ... Если мы сумеем придать смысл буквам так, что нужные равенства и правила сохранятся, но при этом окажется $U \neq e$, мы докажем, что замощение невозможно!

Пример. Вернемся к задаче о шахматной доске с вырезанными углами, с которой мы начали эту статью.

Двум положениям доминошек размера 2×1 соответствуют граничные слова $W_1 = x^2yx^2y^{-1}$ и $W_2 = xy^2x^{-1}y^{-2}$, а граничное слово шахматной доски с вырезанными углами – это $U = x^7y^7x^{-1}yx^{-7}y^{-7}xy^{-1}$ (рис.13). Мы хотим доказать, что из равенств $W_1 = e$ и $W_2 = e$ не следует, что $U = e$; согласно предложению, из этого будет следовать, что искомого замощения доски не существует.

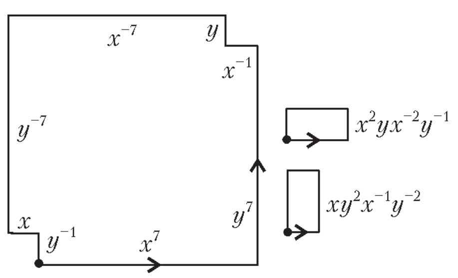


Рис.13. Снова о шахматной доске с вырезанными углами

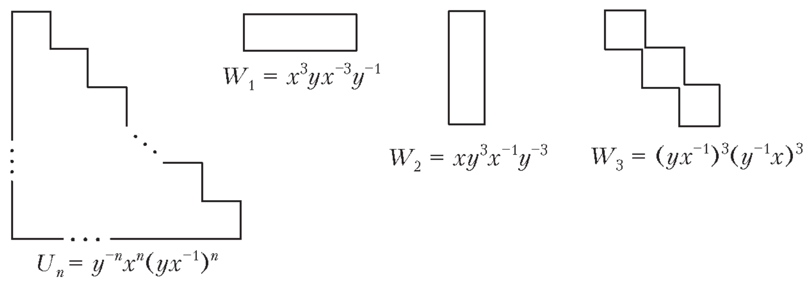


Рис.14. Фигурки и соответствующие им слова

Заменим x перестановкой (12) (перестановка элементов 1, 2 и 3, меняющая местами 1 и 2), а y – перестановкой (23). Напомним, что перестановки можно перемножать: произведение $\alpha\beta$ перестановок α и β означает перестановку, получающуюся в результате последовательного применения перестановки α и перестановки β. Тогда и x^2, и y^2 становятся равными тривиальной перестановке, и поэтому оба слова W_1 и W_2 становятся тривиальными. Следовательно, если $U = e$, то после замены x и y на перестановки (12) и (23) мы должны получить тривиальную перестановку.

Но это не так! Читатель без труда проверит, что $U = (xy)^4 = (312)$ (перестановка, сдвигающая элементы 1, 2, 3 по циклу: 1 на место 2, 2 на место 3 и 3 на место 1), т.е. U соответствует нетривиальной перестановке.[2]

Доказательство теоремы 1

Неудивительно, что теорема 1 потребует большей работы, нежели наш пример: в конце концов, у задачи о шахматной доске с вырезанными углами есть простое решение, использующее раскраски.

Во-первых, раньше мы выяснили, что существует необходимое условие для существования замощения: n должно быть сравнимо с 0 или 8 по модулю 9. Если замощение существует при $n \equiv 8 \pmod 9$, то, как показано на рисунке 9, оно также существует и для $n \equiv 0 \pmod 9$. Итак, достаточно доказать, что замощение невозможно при n, кратном 9.

Изобразим треугольник из точек иначе: как «лесенку» на клетчатой бумаге, первая строчка которой состоит из одной клетки, вторая – из двух, и так далее. Тогда наши плашки длины три будут изображаться в виде фигур с рисунка 14. На том же рисунке указаны и граничные слова для этих многоугольников. Мы хотим доказать, что для всякого n из равенств $W_1 = W_2 = W_3 = e$ не следует равенство $U_n = e$. Рассмотрим теперь три семейства ориентированных параллельных прямых, изображенные на рисунке 15. Эти прямые отстоят друг от друга на равные расстояния и пересекаются под углом $60°$; они образуют замощение плоскости равносторонними треугольниками и правильными шестиугольниками. Обозначим треугольники буквами x и y, как показано на рисунке 15. Получившийся рисунок будем называть шестиугольной решеткой.

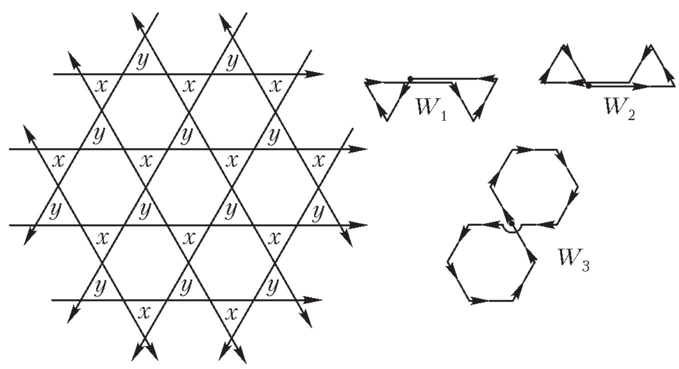


Рис.15. Шестиугольная решетка: дублеры границ трех плашек

Шестиугольная решетка весьма симметрична. Для любых двух ее вершин существует движение плоскости, переводящее одну из них в другую и сохраняющее решетку. Например, параллельный перенос переводит вершину B на рисунке 16 в вершину D, а поворот на $120°$ вокруг точки A, являющейся центром треугольника, отмеченного буквой x, переводит вершину B в C.

Всякий путь на квадратной решетке можно следующим образом продублировать на шестиугольной решетке. Путь на квадратной решетке записывается в виде слова из букв x, y, x^{-1} и y^{-1}. Во всякой вершине шестиугольной решетки пересекаются две ориентиро-

[2] *В теоретико-групповых терминах можно сказать, что мы построили гомоморфизм из группы Конвея замощения в группу перестановок трех элементов; этот гомоморфизм переводит граничное слово шахматной доски с вырезанными углами в нетривиальную перестановку.*

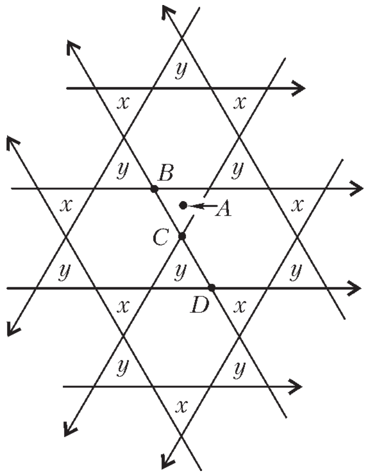


Рис.16. Симметрии шестиугольной решетки

ванные прямые, и два из четырех полученных углов отмечены буквами x и y (рис.15). Мы будем интерпретировать символы x, y, x^{-1} и y^{-1} как инструкции по построению пути-дублера: $x^{\pm 1}$ будет означать «сделать один шаг по границе угла, отмеченного буквой x, по направлению ориентации или против него соответственно»; то же самое для $y^{\pm 1}$. Итак, как только мы выберем начальную точку, путь на квадратной решетке определит нам путь-дублер на шестиугольной решетке.

На рисунке 15 показаны пути на шестиугольной решетке, построенные по граничным путям трех фигурок с рисунка 14. Заметьте, что все три пути-дублера замкнуты; этот факт остается верным при любом выборе начальной точки пути-дублера из-за симметрий шестиугольной решетки. Напротив, дублер пути $xyx^{-1}y^{-1}$, т.е. границы единичного квадратика, будет незамкнутым.

Будем рассматривать только такие пути на квадратной решетке, дублеры которых на шестиугольной решетке будут замкнутыми. Этим свойством обладают граничные пути трех плашек, а также граница изображенной на рисунке 14 «лесенки»; ее дублер показан на рисунке 17 (здесь мы пользуемся тем, что n делится на три).

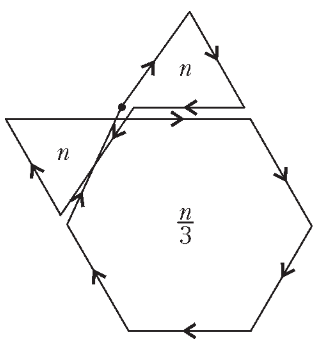


Рис.17. Дублер к границе «лесенки»

Ориентированная замкнутая кривая делит плоскость на некоторое количество компонент. Каждой компоненте отвечает число вращения этой кривой вокруг любой точки данной компоненты. Ориентированная площадь, ограниченная замкнутой кривой, равна сумме площадей компонент, умноженных на соответствующие числа вращения. Например, единичный круг с ориентированной против часовой стрелки границей имеет ориентированную площадь π, а если его граница ориентирована по часовой стрелке, то $-\pi$.[3] Сопоставим пути на квадратной решетке ориентированную площадь, ограниченную его дублером на шестиугольной решетке. Для граничных путей трех фигурок эта площадь равна нулю (см. рис.15), тогда как для «лесенки» соответствующая ориентированная площадь всегда отрицательна (см. рис. 17).

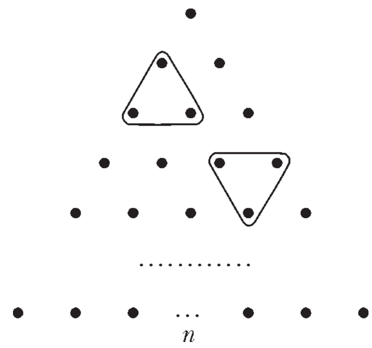


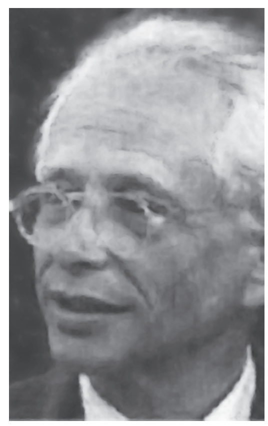
Рис.18. Можно ли замостить большой треугольник маленькими?

Из этого следует, что $U_n \neq e$. Действительно, если заменить одно из слов W_1, W_2 или W_3 словом e или наоборот, то ориентированная площадь, ограниченная путем-дублером, не изменится. Эта площадь равна нулю для тривиального слова и отлична от нуля для U_n. Тем самым доказательство теоремы 1 закончено.

В завершение этого раздела приведем еще одну теорему, которую можно доказать аналогично теореме 1. На этот раз мы попытаемся замостить такой же треугольник, составленный из точек, маленькими треугольниками из трех точек (рис.18).

Теорема 2. *Такое замощение существует тогда и только тогда, когда* $n \equiv 0, 2, 9$ *или* $11 \pmod{12}$.

Теорема Макса Дена



Макс Ден, 1878–1952

После решения третьей проблемы Гильберта Макс Ден доказал в 1903 году следующую теорему.

Теорема 3. *Если прямоугольник замощен квадратами, то отношение длин его сторон есть рациональное число.*

Обратное с очевидностью верно (рис.19).

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Можно масштабировать прямоугольник так, чтобы его ширина была равной 1; пусть его высота x – иррациональное число.

Предположим, что замощение при помощи квадратов существует. Продлим стороны квадратов на всю длину или ширину прямоугольника (рис. 20). Теперь у нас есть замощение нашего прямоугольника размера $x \times 1$ и всех квадратов при помощи некоторого количества меньших прямоугольников; пусть длины их сторон (в произвольном порядке) равны $a_1, \ldots, a_N$. Рассмотрим последовательность

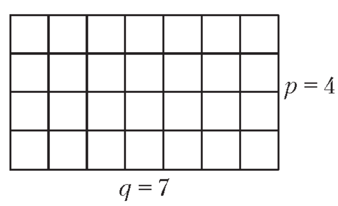


Рис.19. Если отношение длин сторон прямоугольника рационально, его можно замостить квадратами

$$1,\ x,\ a_1,\ \ldots,\ a_N; \tag{1}$$

удалим из нее те числа, которые являются линейными комбинациями предыдущих с рациональными коэф-

[3] *В математическом анализе ориентированная площадь определяется как интеграл вдоль кривой от дифференциальной формы $x\,dy$.*

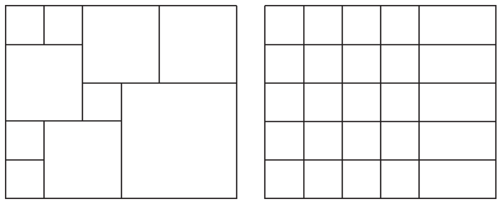


Рис. 20. Продление сторон квадратов

фициентами. Так, мы не удаляем 1, мы также не удаляем x, поскольку оно иррационально; мы удаляем a_1, если и только если $a_1 = r_1 + r_2 x$, где r_1 и r_2 рациональны, и т.д. Пусть $b_1 = 1$, $b_2 = x$, b_3, …, b_m – оставшиеся числа. Важное замечание: всякое из чисел в последовательности (1) может быть представлено в виде рациональной линейной комбинации чисел b_1, … …, b_m, причем единственным образом.

(Это стандартная теорема из линейной алгебры, но ради полноты изложения приведем здесь ее доказательство. Очевидно, что 1 и x являются рациональными линейными комбинациями чисел b_1, …, b_m (просто $1 = b_1$ и $x = b_2$). Предположим по индукции, что все числа в последовательности (1), предшествующие a_k, суть рациональные линейные комбинации чисел b_1, … …, b_m. Возможны два случая: либо a_k не является рациональной линейной комбинацией предыдущих чисел – тогда оно является одним из b_j и тем самым является рациональной линейной комбинацией b_1, … …, b_m; либо a_k является рациональной линейной комбинацией предыдущих чисел – тогда оно является рациональной линейной комбинацией b_1, …, b_m, поскольку все предыдущие числа представимы как рациональные линейные комбинации b_1, …, b_m. Осталось доказать единственность. Если две различные линейные комбинации чисел b_1, …, b_m равны, $\sum_{i=1}^{m} r'_i b_i = \sum_{j=1}^{m} r''_j b_j$, а s – максимальное число от 1 до m, для которого $r'_s \neq r''_s$, то $b_s = \sum_{i=1}^{s-1} \frac{r'_i - r''_i}{r''_s - r'_s} b_i$, откуда получается, что b_s – линейная комбинация предыдущих чисел b_i, что противоречит нашему выбору b_1, …, b_m.)

Пусть f – следующая функция от чисел b_1, …, b_m:

$$f(1) = 1,\ f(x) = -1,\ f(b_3) = \ldots = f(b_m) = 0.$$

Продолжим f на все рациональные линейные комбинации чисел b_1, …, b_m по линейности:

$$f(r_1 b_1 + \ldots + r_m b_m) = r_1 f(b_1) + \ldots + r_m f(b_m).$$

Значит, если u и v – рациональные линейные комбинации чисел b_1, …, b_m, то

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \qquad (2)$$

т.е. функция f *аддитивна*.

Рассмотрим прямоугольник, длины обеих сторон которого u и v суть рациональные линейные комбинации чисел b_1, …, b_m. Определим «площадь» этого прямоугольника как $f(u)f(v)$. Если у двух таких прямоугольников имеется общая горизонтальная или вертикальная сторона, их можно объединить в больший прямоугольник. В силу аддитивности функции f (равенство (2)) «площадь» большего прямоугольника есть сумма «площадей» двух меньших прямоугольников.

Следовательно, «площадь» прямоугольника размера $x \times 1$ равна сумме «площадей» квадратов, из которых он составлен. Первая равна $f(x)f(1) = -1$, тогда как «площадь» квадрата размера $u \times v$ равна $f(u)^2$, т.е. неотрицательна. Мы получили противоречие.

Замощения квадратами и электрические цепи

Рассмотрим замощение прямоугольника квадратами, изображенное на рисунке 21. Пусть x_1, …, x_9 – длины сторон квадратов. Для каждого отрезка на этом рисунке, как горизонтального, так и вертикального, имеется линейное соотношение между переменными x_i: эти соотношения выражают длину отрезка в виде суммы длин сторон квадратов, граничащих по этому отрезку с обеих сторон. Для замощения на рисунке 21 получатся следующие уравнения:

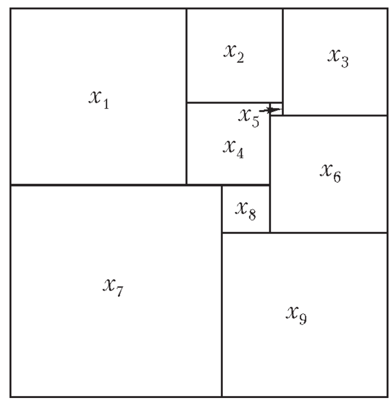


Рис. 21. Замощение квадратами

$$x_2 = x_4 + x_5,\ x_3 + x_5 = x_6,\ x_1 + x_4 = x_7 + x_8,$$
$$x_6 + x_8 = x_9 \qquad (3)$$

(горизонтальные отрезки) и

$$x_1 = x_2 + x_4,\ x_7 = x_8 + x_9,\ x_4 + x_8 = x_5 + x_6 \qquad (4)$$

(вертикальные отрезки). Чтобы такое замощение существовало, эта система линейных уравнений должна быть разрешима в положительных числах. Замощение на рисунке 21 соответствует следующему решению:

$$x_1 = 15,\ x_2 = 8,\ x_3 = 9,\ x_4 = 7,\ x_5 = 1,\ x_6 = 10,$$
$$x_7 = 18,\ x_8 = 4,\ x_9 = 14;$$

разумеется, весь этот набор чисел можно умножить на произвольный множитель.

Уравнения (3) и (4) можно интерпретировать как правила Кирхгофа для электрических цепей. Пример такой цепи показан на рисунке 22. Предположим, что все резисторы имеют единичное сопротивление и что сила тока в i-м резисторе равняется x_i. Есть два правила Кирхгофа: первое правило, или *закон токов*, утверждает, что сумма токов, втекающих в каждый узел, равняется сумме токов, вытекающих из него; второе правило, или *закон напряжений*, гласит, что сумма падений напряжения по любому замкнутому контуру равна нулю.[4] Поскольку сопротивление всех резисторов единичное, по закону Ома падение напряжения на i-м резисторе равно силе тока x_i. Законы токов для цепи на рисунке 22 – это в точности уравнения (3), а законы напряжений – это уравнения (4).

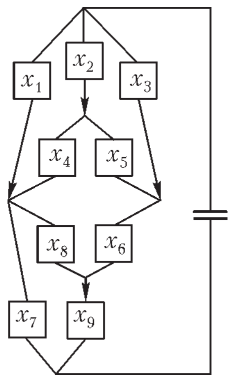


Рис. 22. Электрическая цепь, соответствующая замощению на рис. 21

Контур на рисунке 22 получается из замощения на рисунке 21 следующим образом: всякому горизонтальному отрезку соответствует узел электрической цепи, а каждый квадрат соответствует резистору. Резистор соединяет два узла, если отвечающий ему квадрат примыкает к соответствующим двум отрезкам. Эта конструкция работает для любого замощения прямоугольника квадратами и дает электрическую цепь.

Падение напряжения между верхней и нижней вершинами (т.е. напряжение источника ЭДС) единственным образом определяет токи во всех резисторах, и мы получаем решение системы (3) – (4). В частности, у этой системы имеется единственное решение, с точностью до общего множителя. То же самое верно и для любого замощения прямоугольника квадратами. Недостаток этого метода состоит в том, что у нас нет контроля над знаками силы тока: ток в некоторых резисторах может оказаться отрицательным, и тогда электрическая цепь не будет соответствовать никакому замощению прямоугольника квадратами.

Замощение прямоугольниками с целочисленными сторонами

Теорема 4. *Пусть прямоугольник R замощен прямоугольниками, у каждого из которых есть целочисленная сторона. Тогда и у R есть целочисленная сторона.*

У этой теоремы о замощениях известно чрезвычайно много различных доказательств (в журнале «American Mathematical Monthly», 7-й выпуск за 1987 год, опубликована статья, в которой приведено четырнадцать, а кроме них есть и другие). Мы выбрали одно из самых красивых (*от редакции*: для тех, кто незнаком с двойными интегралами, после этого доказательства мы приводим по сути вариант того же самого рассуждения, но на абсолютно элементарном языке!).

Доказательство. Интеграл $\int \sin 2\pi x\, dx$ по отрезку целой длины равен нулю. Следовательно, двойной интеграл

$$\iint \sin 2\pi x \sin 2\pi y\, dx dy$$

по каждому из прямоугольников, участвующих в замощении, равен нулю. Значит, этот двойной интеграл по всему прямоугольнику R также равен нулю. Предположим, что левый нижний угол прямоугольника R находится в начале координат, а длины его сторон равны a и b. Тогда

$$\int_0^a \int_0^b \sin 2\pi x \sin 2\pi y\, dx dy = \frac{1}{(2\pi)^2}(1-\cos 2\pi a)(1-\cos 2\pi b).$$

Следовательно, либо $\cos 2\pi a = 1$, либо $\cos 2\pi b = 1$, т.е. либо a, либо b – целое число.

Замена в этом доказательстве функции $\sin 2\pi x \sin 2\pi y$ на функцию $(-1)^{[2x]}(-1)^{[2y]}$ дает простое доказательство без интегралов.

Аналогичное элементарное доказательство. Разграфим плоскость на клетки со стороной $1/2$ и раскрасим ее в два цвета – черный и белый, – в шахматном порядке.

Верен такой замечательный факт: как бы мы ни расположили на этой плоскости прямоугольник, стороны которого параллельны линиям сетки и длина одной из сторон целая, в нем будет поровну черного и белого цвета. Это совсем очевидно, если его стороны с целой длиной (пусть они горизонтальны) упираются концами в линии сетки – тогда прямоугольник делится вертикальными линиями сетки на четное число одинаковых по размеру столбиков (для этого мы взяли сторону клетки $1/2$), причем в каждом столбике столько белого, сколько в соседнем черного, и наоборот (рис.23). Разбив столбики на пары соседних, видим, что белого и черного в прямоугольнике поровну. Общий случай сводится к только что рассмотренному – проверьте, что, сдвигая прямоугольник параллельно его стороне с целой длиной, мы не меняем в нем количество черного и белого цвета.

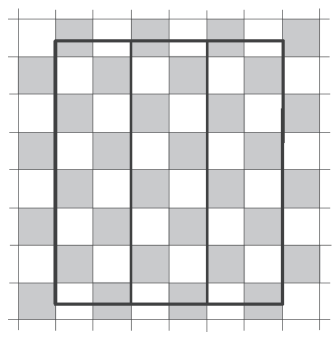


Рис. 23

Теперь несложно вывести и саму теорему. Расположим наш большой прямоугольник так, чтобы он весь лежал в первом квадранте, а одна из его вершин совпадала с началом координат. В каждом маленьком прямоугольнике белого и черного будет поровну, а значит и в большом – тоже. Пусть обе стороны большого прямоугольника нецелые. Рассмотрим самую высокую горизонтальную линию сетки с целой ординатой и самую правую вертикальную линию сетки с целой абсциссой, пересекающие наш прямоугольник (рис.24). Они делят его на четыре прямоугольные части, три из которых имеют сторону с целой длиной и, значит, содержат поровну белого и черного цвета. Тогда и четвертая часть (правая верхняя) содержит поровну

[4] *Разумеется, здесь рассматриваются только контуры, не включающие в себя источник ЭДС. – Прим. перев.*

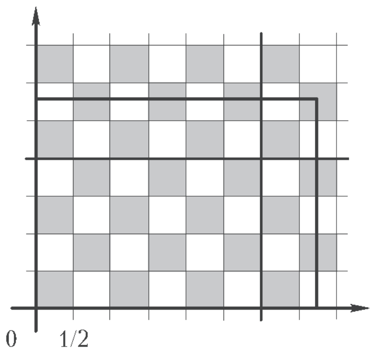


Рис. 24

черного и белого цвета. Эта часть целиком лежит в квадрате 1×1 и имеет нецелые стороны a и b, где $0 < a, b < 1$ (рис.25). Линии сетки делят этот квадрат на четыре квадратика размером 1/2×1/2, раскрашенных в шахматном порядке. Ясно, что стороны a и b не могут быть одновременно меньше 1/2 (тогда вся часть лежит в квадратике одного цвета). Пусть $a \geq 1/2$. Будем монотонно увеличивать a до 1. При этом доля одного из цветов в нашей части тоже будет монотонно увеличиваться, но при $a = 1$ количества цветов сравняются. Значит, их было непоровну. Полученное противоречие доказывает теорему.

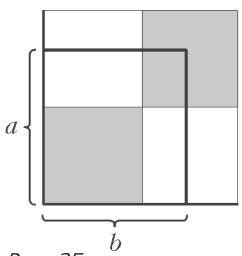


Рис. 25

У теоремы 4 есть интересное следствие. Предположим, что прямоугольник размера $m \times n$ замощен прямоугольниками размера $p \times q$ (все числа m, n, p, q целые). Разумеется, отсюда следует, что pq делит mn. Но можно сказать и больше.

Следствие. *Число p делит либо m, либо n; то же самое верно и для q.*

Доказательство. Домножим все длины на $1/p$; получим, что прямоугольник размера $(m/p)\times(n/p)$ замощен прямоугольниками размера $1\times(q/p)$. По теореме 4 либо m/p, либо n/p целое, т.е. p делит либо m, либо n. Аналогично и для q.

Немного о замощениях треугольниками равной площади

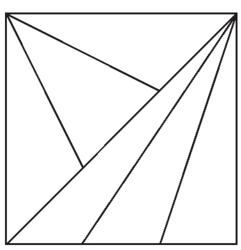


Рис. 26. Замощение треугольниками равной площади

В завершение мы должны упомянуть еще один чрезвычайно любопытный результат о «невозможном замощении»: *квадрат нельзя замостить нечетным числом треугольников одинаковой площади* (замощение произвольным четным числом таких треугольников показано на рисунке 26). Это достаточно новая теорема – ее доказал Пол Монски (Paul Monsky) в 1970 году, – и ее доказательство крайне неожиданно.[5] Возможно, еще более неожиданно, что существуют четырехугольники, которые нельзя замостить никаким количеством треугольников равной площади.

Упражнения

1. Можно ли замостить доминошками фигуру, изображенную на рисунке 27?

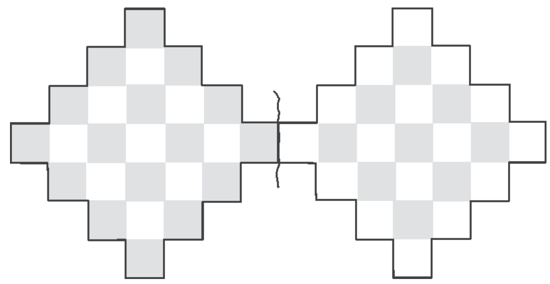


Рис. 27. Еще одно доказательство с помощью раскраски

2. Вырежем из шахматной доски одну белую и одну черную клетку. Докажите, что полученную доску можно замостить доминошками.

Указание. Рассмотрите замкнутый путь, покрывающий все клетки, и выложите доминошки вдоль него.

3. Докажите, что квадрат размера 10×10 нельзя замостить прямоугольниками размера 1×4.

Указание. Используйте раскраску в четыре цвета.

4.** Докажите теорему 2.

5. Покажите, что многоугольник на рисунке 28 невозможно замостить квадратами (это, конечно же, станет возможно, если мы разрешим использовать «квадраты из антивещества»!).

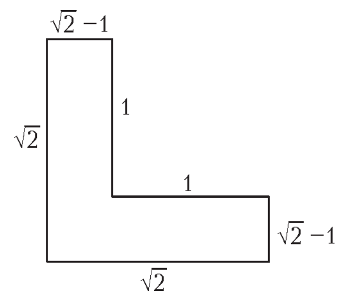


Рис. 28. Этот многоугольник нельзя замостить квадратами

6. Пусть $x = 2 - \sqrt[3]{5}$. Разрежьте квадрат на три прямоугольника, подобных прямоугольнику размера $1\times x$.

Комментарий. Квадрат можно разрезать на прямоугольники, подобные прямоугольнику размера $1\times x$, если и только если x является корнем многочлена с целыми коэффициентами и при этом для каждого корня $a + bi$ многочлена наименьшей степени, корнем которого является x, выполнено неравенство $a > 0$.

7. Покажите, что теорема 4 останется верной, если разрешить использовать «квадраты из антивещества».

Указание. Переопределите «площадь» прямоугольника размера $u\times v$ как $uf(v) - vf(u)$. Эта площадь снова будет аддитивной, а для всех квадратов она окажется равной нулю.

[5] *См., например, статью Б.Беккер, С.Востоков, Ю. Ионин. «2-адические числа». «Квант» №2 за 1979 г.*

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2011» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2214» или «Ф2220». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvantjournal.ru и phys@kvantjournal.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2214, М2215а, М2218 предлагались на региональном этапе XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи М2214–М2220, Ф2220–Ф2227

М2214. На доске выписаны $N \geq 4$ чисел. Оказалось, что сумма любых трех выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?

И.Богданов

М2215. а) Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвертая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

б) Существует ли четверка простых чисел p, q, r, s такая, что шестая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение трех остальных?

В.Сендеров

М2216. На сторонах A_1A_2, A_2A_3, A_nA_1 выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ взяты точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно. Докажите, что круги, описанные вокруг треугольников $B_nA_1B_1$, $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3$, …, $B_{n-1}A_nB_n$, покрывают весь многоугольник.

П.Кожевников, Н.Седракян

М2217. Найдите все наборы из $n \geq 2$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенствам

$$|a_1 - a_2| = 2|a_2 - a_3| = 3|a_3 - a_4| = \ldots = n|a_n - a_1|.$$

По мотивам Румынской олимпиады

М2218. Прямую палку длиной $2M$ сантиметров распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

А.Магазинов

М2219. Две неравные окружности ω_1 и ω_2 касаются внутренним образом окружности ω в точках A и B. Пусть C и D – точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2 (C и D лежат внутри ω). Прямая CD пересекает ω в точках E и F. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках E и F, пересекаются на прямой AB.

Фольклор

М2220. Скандалист и n нормальных зрителей купили билеты в театр. Билеты на s мест оказались нераспроданы. Скандалист, растолкав всех, первым вошел в зал и сел на случайно выбранное им место, не поинтересовавшись номером своего места. После этого остальные зрители действовали по следующим правилам: если указанное в билете место свободно, то зритель садится на свое место; если место занято, то зритель садится на любое еще не занятое место. Какова вероятность того, что последний вошедший в зал зритель сядет не на свое место?

М.Гервер

Ф2220. Во время ремонтных работ на МКС космонавт, находясь снаружи, пользовался молотком. После одного неудачного удара головная часть молотка отломилась и улетела со скоростью 20 м/с относительно станции (эта скорость перпендикулярна плоскости орбиты станции). Оказалось, что сразу после этого удара и МКС и «новый спутник» имели относительно Земли строго одинаковые по величине скорости порядка 8 км/с, которые были горизонтальными для наблюдателя на Земле, над головой которого произошло описываемое происшествие. На какое максимальное расстояние удалятся друг от друга МКС и «новый спутник» за первые полчаса его самостоятельного полета?

Л.Мотков

Ф2221. В далеком космосе оказался школьный динамометр, корпус которого имеет массу $M = 20$ г, а пружина имеет массу m = 10 г. За крючок, укрепленный на корпусе, тянут с силой F_1 = 5 Н, направленной вдоль оси пружины, а за крючок, находящийся на свободном конце пружины, тянут с силой F_2 = 2 Н, направленной в противоположную сторону. Что будет показывать динамометр, т.е. напротив какого деления на его шкале остановится индикаторная стрелка?

В.Сергеев

Ф2222. На наклонной плоской поверхности, составляющей угол $\alpha = 60°$ с горизонтом, находится небольшая плоская шайба массой m = 0,5 кг, прикрепленная легкой нитью длиной L = 1 м к точке на этой поверхности. Шайбу толкают вдоль поверхности так, что нить оказывается натянутой и скорость шайбы перпендикулярна нити. В некоторый момент шайба имеет горизонтальную скорость v = 2 м/с. Каково по величине ускорение шайбы в этот момент? Каким может быть натяжение нити в этот момент? Коэффициент трения шайбы о поверхность μ = 0,6. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

С.Дмитриев

Ф2223. Парафиновые свечи имеют цилиндрическую форму с площадью поперечного сечения $S = 1$ см^2 и длиной L = 20 см. Если свеча горит в подсвечнике, то время ее горения равно T = 3 ч. На одном конце такой свечи поджигают фитиль, а к другому концу прикрепляют стальной шарик диаметром D = 7 мм. Свечу опускают в воду при температуре 4 °С, и она некоторое время плавает, не касаясь дна сосуда. Сколько времени она будет гореть в этом случае? Плотность парафина $\rho_п = 0{,}9$ г/см^3, плотность стали $\rho_с =$ $= 7{,}7$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3.

В.Свечкин

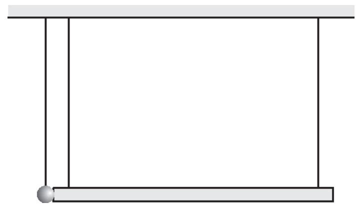
Ф2224. Экспериментатор Вася приобрел очень качественный термос (сосуд, который исключает теплообмен содержимого с окружающей средой) емкостью 1 л, теплоемкость стенок которого 100 Дж/К. Начальная температура стенок пустого термоса 20 °С (как в комнате). Вася последовательно наливает в термос 1 г воды при температуре 1 °С, затем 2 г воды при температуре 2 °С, потом 3 г воды при температуре 3 °С ... и так далее вплоть до заполнения термоса. Какой будет установившаяся температура содержимого термоса?

Э.Васин

Ф2225. Легкое кольцо из тонкой проволоки висит на мыльной пленке, которая удерживается рамкой в форме окружности. Масса кольца m, его радиус R, коэффициент поверхностного натяжения пленки σ, диаметр рамки $D > 2R$. Рамка и кольцо горизонтальны, их центры находятся на одной вертикали. Каково расстояние от плоскости кольца до плоскости рамки? Массой пленки можно пренебречь в сравнении с массой кольца. Выполняется условие «легкости» кольца: $mg \ll \sigma R$.

С.Кольцов

Ф2226. Маленький шарик и тонкий непроводящий стержень большой длины L, массы которых M одинаковы, подвешены к потолку на нитях одной и той же и очень большой длины R ($R \gg L$). Нити позволяют шарику и стержню двигаться только в одной вертикальной плоскости. Сначала шарик и стержень не были заряжены и висели так, что почти соприкасались друг с другом, причем шарик находился возле одного из концов стержня (см. рисунок). Шарику и стержню сообщили одинаковые электрические заряды Q, причем заряд на стержне распределили равномерно по его длине. На каком расстоянии x окажутся в положении равновесия шарик и тот конец стержня, возле которого шарик находился вначале? Считайте, что диаметр шарика много меньше x, а x много меньше длины стержня L.



Д.Шариков

Ф2227. Связь между эффективным напряжением U на лампе накаливания и током I, текущим через нее, дается формулой $I \sim U^{3/5}$. Две лампы с номинальными напряжениями 220 В и номинальными мощностями 40 Вт и 100 Вт включили последовательно в сеть напряжением 220 В. Каково падение напряжения на лампе меньшей номинальной мощности? (Разрешается пользоваться калькулятором.)

С.Варламов

Решения задач М2191–М2198

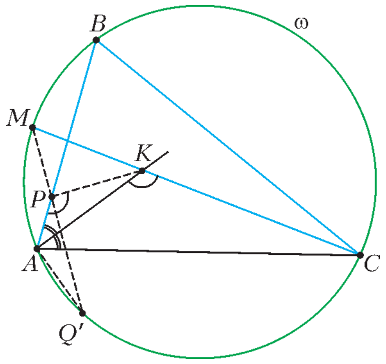
М2191. *Дано натуральное $n > 1$. Докажите, что найдутся такие n последовательных натуральных чисел, что их произведение делится на все простые числа, не превосходящие $2n + 1$, и не делится ни на одно другое простое число.*

Предположим, что число $n + 1$ составное; покажем, что тогда подходят числа $n + 2, \ldots, 2n + 1$. Очевидно, их произведение делится на все простые числа из отрезка $[n + 2;\ 2n + 1]$, но не делится на простые числа, большие $2n + 1$ (ибо все сомножители не превосходят $2n + 1$). Для любого же простого $p \le n$ одно из p последовательных чисел делится на p; значит, и одно из наших n чисел также делится на p.

Если теперь число $n + 1 > 2$ простое, то оно нечетно, а число $n + 2 > 2$ четно и потому составное. В этом случае подходят числа $n + 3, \ldots, 2n + 2$. Действительно, по аналогичным причинам их произведение P делится на все простые числа из отрезков $[1;\ n]$ и $[n + 3;\ 2n + 2]$, но не делится на простые числа, большие $2n + 1$ (поскольку число $2n + 2$ составное). Кроме того, P делится на $n+1 = \frac{2n+2}{2}$.

И.Богданов

М2192. *Внутри треугольника ABC взята точка K, лежащая на биссектрисе угла BAC. Прямая CK вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке M. Окружность Ω проходит через точку A, касается прямой CM в точке K и пересекает вторично отрезок AB в точке*



P, а окружность ω – в точке Q. Докажите, что точки P, Q и M лежат на одной прямой.

Из касания вытекает равенство $\angle APK = \angle AKC$. Пусть прямая MP пересекает вторично окружность ω в точке Q' (см. рисунок). Тогда имеем

$$\angle AQ'P = \angle AQ'M = \angle ACM = 180° - \angle AKC - \angle KAC =$$

$$= 180° - \angle APK - \angle PAK = \angle AKP.$$

Значит, точки A, P, K и Q' лежат на одной окружности, эта окружность совпадает с Ω, и, следовательно, Q' совпадает с Q.

Л.Емельянов

М2193. *В каждой клетке квадрата 100×100 записано некоторое натуральное число. Прямоугольник, стороны которого идут по линиям сетки, назовем хорошим, если сумма чисел во всех его клетках делится на 17. Разрешается одновременно закрашивать все клетки в некотором хорошем прямоугольнике. Одну клетку запрещается закрашивать дважды. При каком наибольшем d можно закрасить хотя бы d клеток при любом расположении чисел?*

Ответ. $9744 = 100^2 - 16^2$.

Лемма. *Пусть полоска $1 \times k$ заполнена натуральными числами. Тогда в ней можно закрасить несколько непересекающихся хороших прямоугольников, содержащих не меньше $k - 16$ клеток.*

Доказательство. Индукция по k. При $k \le 16$ ничего красить не надо. Пусть $k \ge 17$. Пусть в 17 левых клетках стоят числа $a_1, \ldots, a_{17}$. Среди чисел $0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_{17}$ найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 17. Тогда их разность, имеющая вид $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$, будет делиться на 17. Удалим клетки с i-й по j-ю из полоски. Оставшиеся клетки будем считать одной полоской длины $k - (j - i + 1)$. Применив к ней предположение индукции, мы закрасим несколько хороших прямоугольников так, что останется не более 16 незакрашенных клеток. Тогда в исходной полоске можно закрасить те же клетки, а также клетки с i-й по j-ю (они либо образуют новый хороший прямоугольник, либо попадут внутрь старого).

Лемма доказана.

Перейдем к задаче. Покажем, что можно оставить не более $16^2 = 256$ незакрашенных клеток. Рассмотрим полоску 1×100, в клетки которой записаны суммы чисел в столбцах исходного квадрата. Применив к ней утверждение леммы, мы найдем несколько хороших прямоугольников. Тогда в исходном квадрате можно закрасить соответствующие прямоугольники высоты 100. После этого незакрашенными останутся не более 16 столбцов. Применим теперь лемму к каждому из них по отдельности; в каждом столбце останется не более 16 незакрашенных клеток, т.е. всего не более 256 клеток. Осталось привести пример расстановки, в которой нельзя оставить менее 256 клеток незакрашенными. Расставим в каком-нибудь квадрате 16×16 единицы, а во всех остальных клетках – нули. Рассмотрим произвольный прямоугольник P; если он содержит единицу, то он пересекается с квадратом по некоторому прямоугольнику $a \times b$ ($1 \le a, b \le 16$); но тогда сумма всех чисел в P будет равна ab, что не может быть кратным 17. Таким образом, ни одна клетка с единицей закрашена не будет, а значит, останется хотя бы 256 незакрашенных клеток.

П.Зусманович, Ф.Петров

М2194. *В буфете лежат 100 яблок суммарной массой 10 кг, каждое массой не меньше 25 г. Буфетчице нужно разрезать их на части и раздать 100 детям, каждому по 100 г. Докажите, что она может это сделать так, чтобы масса любого куска яблока была не меньше 25 г.*

Все массы в решении будем измерять в граммах. Назовем кусок яблока (или само яблоко) *большим*, если его масса не меньше 25.

Докажем индукцией по n, что n больших яблок суммарной массы $100n$ можно разрезать на большие куски и раздать n детям поровну.

База при $n = 1$ очевидна. Пусть $n > 1$. Рассмотрим два самых тяжелых яблока; пусть их массы $a \ge b$. Заметим, что $a + b \ge 200$ (иначе средняя масса одного яблока будет меньше чем $200/2 = 100$). Выкинем эти два яблока из набора и добавим в него яблоко массы $c = a + b - 100 \ge 100$. По предположению индукции, полученный набор можно разрезать на большие куски и раздать $n - 1$ детям поровну. Если при этом какой-то кусок нового яблока оказался больше 50, разрежем его на два больших куска. Через несколько таких разрезаний мы придем к ситуации, когда новое яблоко разделено на куски массами $c_1, c_2, \ldots, c_k$, не превосходящими 50. Обозначим $s_d = c_1 + \ldots + c_d$ при $d = 1, 2, \ldots, k$ и положим $s_0 = 0$.

Покажем теперь, как разрезать исходный набор. Все яблоки, кроме a и b, разрежем так же, как и в новом наборе. Заметим, что $a \ge 200/2 = 100$. Обозначим через t минимальный индекс такой, что $a - s_t \le 75$, и отрежем от a куски $c_1, \ldots, c_t$, а от b – куски $c_{t+1}, \ldots, c_k$. Заметим, что $a - s_{t-1} > 75$, поэтому от a остался кусок $a' = a - s_t = (a - s_{t-1}) - c_t$ такой, что $75 \ge a' > 75 - c_t \ge 25$. От b же остался кусок b' такой, что $a' + b' = a + b - c = 100$, поэтому $25 \le b' \le 75$. Итак, можно a' и b' отдать одному ребенку, а остальные куски распределить между остальными детьми так же, как это делалось в новом наборе. Утверждение доказано.

Замечание. В доказанном *общем* утверждении число 25 нельзя заменить на большее, не зависящее от n.

К.Кноп, И.Богданов

М2195. *Даны $n \ge 3$ попарно взаимно простых чисел. Известно, что при делении произведения любых $n - 1$*

из них на оставшееся число получается один и тот же остаток r. Докажите, что $r \le n-2$.

Если $r = 0$, то утверждение задачи, очевидно, истинно. Пусть $r > 0$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – данные числа; положим $P = a_1 a_2 \ldots a_n$, $P_i = P/a_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что $a_i > r$, ибо число P_i дает остаток r при делении на a_i.

Рассмотрим число $S = P_1 + P_2 + \ldots + P_n - r$. Заметим, что $S = (P_1 - r) + (P_2 + P_3 + \ldots + P_n) \vdots a_1$, поскольку оба слагаемых делятся на a_1. Аналогично, $S \vdots a_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$; так как a_i попарно взаимно просты, получаем, что S делится на $a_1 \ldots a_n = P$. Поскольку $S > a_1 - r > 0$, получаем, что $S \ge P$, а тогда $P_1 + \ldots + P_n = S + r > P$. Значит, при некотором i верно неравенство $P_i > P/n$, откуда $a_i < n$, или $a_i \le n-1$. Но тогда $r < a_i \le n-1$, т.е. $r \le n-2$.

В.Сендеров

M2196. *Могут ли 4 центра вписанных в грани тетраэдра окружностей лежать в одной плоскости?*

Ответ. Не могут.

Пусть I_A, I_B, I_C, I_D – центры вписанных окружностей треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Предположим, что они лежат в одной плоскости. Тогда либо они образуют выпуклый четырехугольник, либо одна из этих точек лежит в треугольнике, образованном тремя другими.

Случай 1. Пусть без ограничения общности $I_A I_B I_C I_D$ – выпуклый четырехугольник, тогда отрезки $I_A I_C$ и $I_B I_D$ пересекаются. Обозначим через M, N, K, L середины ребер AB, AD, CD, BC соответственно (рис.1). Рассмотрим треугольник ABC (рис.2). Проведем через точку B прямую l, параллельную AC; тогда вписанная окружность этого треугольника лежит между прямыми l и AC, касаясь AC, но не касаясь l. Это значит, что точки

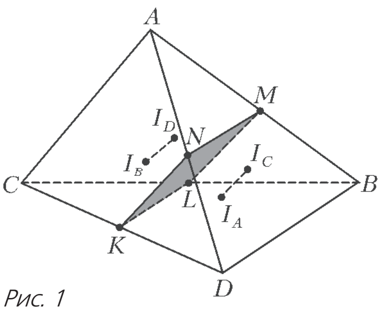


Рис. 1

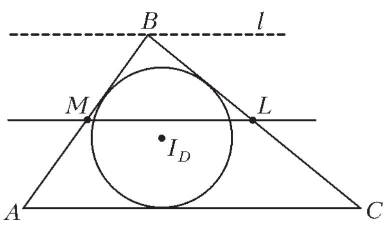


Рис. 2

I_D и B лежат по разные стороны от средней линии ML. Аналогично получаем, что точки I_B и I_D окажутся по одну сторону от плоскости $MNKL$, а точки I_A и I_C – по другую. Но тогда отрезки $I_B I_D$ и $I_A I_C$ не могут пересекаться – противоречие.

Случай 2. Покажем, что точка I_A не может лежать в треугольнике $I_B I_C I_D$. Это следует из того, что точки I_B, I_C, I_D лежат строго по одну сторону от плоскости BCD, а точка I_A – в этой плоскости.

И.Богданов, О.Подлипский

M2197. *Многочлен $P(x)$ степени $n \ge 3$ имеет n вещественных корней $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, причем $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \ldots < x_n - x_{n-1}$. Докажите, что максимум функции $y = |P(x)|$ на отрезке $[x_1; x_n]$ достигается в точке, принадлежащей отрезку $[x_{n-1}; x_n]$.*

Заметим, что максимум функции $|P(x)|$ не может достигаться в точке x_i, ибо $|P(x_i)| = 0$. Рассмотрим произвольную точку $a \in (x_i; x_{i+1})$ при $i < n-1$; положим $t = a - x_i$, $b = x_n - t$. Заметим, что $b \in (x_{n-1}; x_n)$, поскольку

$$x_n > b > x_n - (x_{i+1} - x_i) > x_n - (x_n - x_{n-1}) = x_{n-1}.$$

Покажем, что $|P(b)| > |P(a)|$; из этого, очевидно, следует утверждение задачи.

Из условия следует, что $x_{k+m} - x_k < x_{l+m} - x_l$ при $1 \le k < l \le n-m$. Поскольку нам известны n корней многочлена $P(x)$, имеем $P(x) = p(x - x_1)\ldots(x - x_n)$, где p – старший коэффициент многочлена $P(x)$. Заметим, что

$$|b - x_s| = x_n - x_s - t > x_{i+n-s} - x_i - t = |x_{i+n-s} - a|$$

при $i+1 \le s \le n-1$. Кроме того,

$$|b - x_r| = b - x_r > x_{n-1} - x_r > a - x_r = |a - x_r|$$

при $1 \le r \le i-1$. Перемножая все полученные неравенства с равенством

$$p|b - x_n| \cdot |b - x_i| = pt(x_n - x_i - t) = p|a - x_i| \cdot |a - x_n|,$$

получаем

$$P(b) = p|b - x_1| \cdot |b - x_2| \cdot \ldots \cdot |b - x_n| > \\ > p|a - x_1| \cdot |a - x_2| \cdot \ldots \cdot |a - x_n| = P(a),$$

что и требовалось доказать.

И.Богданов

M2198*. *Четырехугольник ABCD вписан в окружность ω с центром O, а его диагонали пересекаются в точке K. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 – середины дуг AB, BC, CD, DA (не содержащих других вершин четырехугольника) соответственно. Точки I_1, I_2, I_3, I_4 – центры окружностей, вписанных в четырехугольники ABK, BCK, CDK, DAK соответственно.*

а) Докажите, что прямые $M_1 I_1$, $M_2 I_2$, $M_3 I_3$, $M_4 I_4$ пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что точка пересечения прямых из пункта а) лежит на прямой OK.

Заметим, что точка I_1 лежит на биссектрисах AM_2 и BM_4 углов BAC и ABD, поэтому $I_1 = AM_2 \cap BM_4$ (рис.1). Аналогично, $I_2 = BM_3 \cap CM_1$, $I_3 = CM_4 \cap DM_2$, $I_4 = DM_1 \cap AM_3$. Поскольку $\smile AM_1 + \smile CM_3 = \smile BM_1 + \smile DM_3$, прямая M_1M_3 составляет равные углы с хордами AC и BD; следовательно, прямая M_1M_3

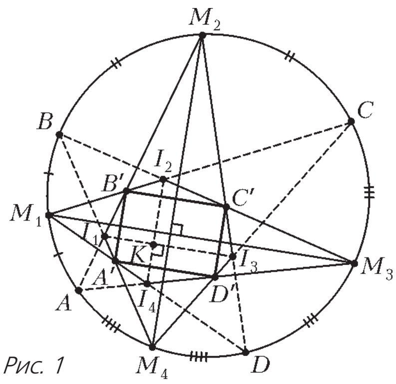


Рис. 1

параллельна биссектрисе угла AKB, т.е. прямой I_1I_3. Аналогично, $M_2M_4 \parallel I_2I_4 \perp I_1I_3$ (поскольку внешняя и внутренняя биссектрисы угла перпендикулярны).

а) Если прямые I_1I_3 и M_1M_3, а также I_2I_4 и M_2M_4 совпадают, утверждение задачи очевидно. Пусть, скажем, точка I_1 не лежит на прямой M_1M_3. Обозначим $A' = DM_1 \cap BM_4$, $B' = AM_2 \cap CM_1$, $C' = BM_3 \cap DM_2$, $D' = AM_3 \cap CM_4$.[1] Имеем $\angle BM_1M_2 = \angle CM_1M_2$ и $\angle BM_2M_1 = \angle AM_2M_1$, поэтому треугольники M_1M_2B и M_1M_2B' симметричны относительно прямой M_1M_2. Отсюда $M_2B' = M_2B$. Аналогично, $M_2C' = M_2C$, и из $M_2B = M_2C$ получаем $M_2B' = M_2C'$. Поскольку $\angle AM_2M_4 = \angle DM_2M_4$, прямая M_2M_4 является биссектрисой (и, значит, высотой) равнобедренного треугольника $M_2B'C'$. Поэтому, $B'C' \perp M_2M_4$, откуда $B'C' \parallel M_1M_3 \parallel I_1I_3$.

Пусть прямая M_2I_2 пересекает отрезки $B'C'$, I_1I_3 и M_1M_3 в точках X, Y, Z соответственно (рис.2). Рассматривая гомотетии с центрами I_2 и M_2, получаем $\frac{M_1Z}{M_3Z} = \frac{B'X}{C'X} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Пусть $P = M_1I_1 \cap M_3I_3$. Если прямая PY пересекает M_1M_3 в точке Z', то из гомотетии с центром P получаем $\frac{M_1Z'}{M_3Z'} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Значит, Z' совпадает с Z. Получаем, что точка P лежит на прямой M_2I_2.

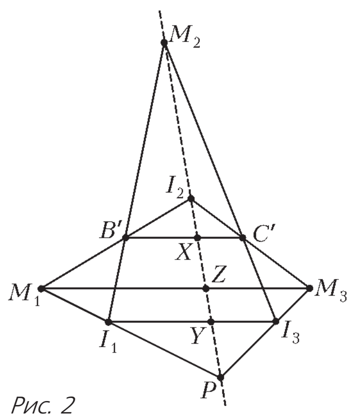


Рис. 2

Аналогично, P лежит на прямой M_4I_4, т.е. все четыре прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в точке P.[2]

б) Пусть биссектриса I_1I_3 угла AKB пересекает вторично описанную окружность треугольника AKB в точке N_1 (рис.3). Аналогично, пусть I_1I_3 пересекает вторично описанную окружность треугольника CKD в точке N_3. Из подобия $\Delta AKB \sim \Delta DKC$ следует равенство отношений соответствующих отрезков, в частности $\frac{KI_1}{KI_3} = \frac{KN_1}{KN_3}$. Далее, точки M_1 и N_1 равноудалены от A и B, значит, M_1N_1 – серединный перпендикуляр к отрезку AB, и O лежит на M_1N_1. Аналогично, O лежит на M_3N_3. В случае, если прямая OK совпадает с M_1M_3, задача очевидна. Иначе, пусть $T = OK \cap M_1M_3$. Из гомотетии с центром O (вспомним, что $M_1M_3 \parallel N_1N_3$) следует, что $\frac{TM_1}{TM_3} = \frac{KN_1}{KN_3}$. Пусть $PT \cap I_1I_3 = K'$. Из гомотетии с центром P следует, что $\frac{TM_1}{TM_3} = \frac{K'I_1}{K'I_3}$. В результате получаем, что $\frac{KI_1}{KI_3} = \frac{K'I_1}{K'I_3}$, и, значит, $K' = K$, т.е. O, P, K лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

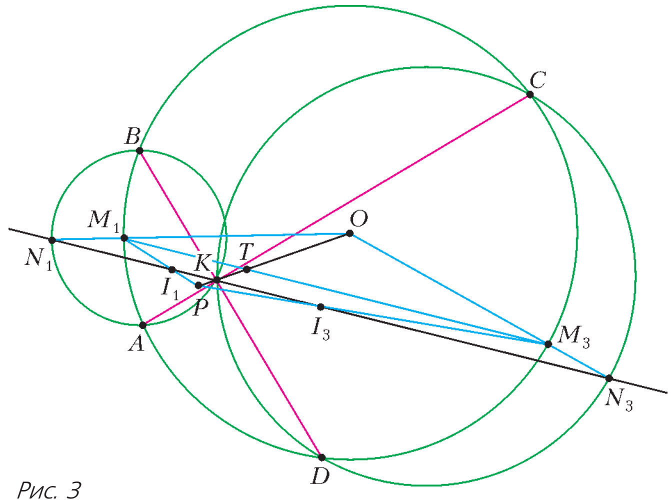


Рис. 3

Замечание. Из решения пункта б) вытекает следующий факт: прямая OK делит отрезок M_1M_3 в отношении, равном коэффициенту подобия треугольников AKB и DKC.

И.Богданов, П.Кожевников

[1] *Точки A', B', C', D' являются центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD, BAC, CBD, DAC соответственно.*

[2] *Здесь по сути работает теорема о трех гомотетиях (для гомотетий, переводящих отрезки $B'C'$, M_1M_3, I_1I_3 друг в друга).*

Числа Стирлинга

20 лет назад, в седьмом номере «Кванта» за 1991 год, в рубрике «Математические сюрпризы» была опубликована статья Дж.Конвея «Один старый факт и несколько новых». Там на числовых примерах было рассказано о двух чудесах, и автор просил доказать, что они всамделишные. Попробуем с ними разобраться.

Начнем издалека, с алгебры. Возрастающими степенями называют следующие многочлены:

$$x^{\overline{1}} = x\,,$$

$$x^{\overline{2}} = x(x+1) = x^2 + x\,,$$

$$x^{\overline{3}} = x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x\,,$$

$$x^{\overline{4}} = \left(x^3 + 3x^2 + 2x\right)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x\,.$$

Коэффициенты этих многочленов – это и есть числа Стирлинга[1] (рис.1). Коэффициент при k-й степени у

n	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$
1	1					
2	1	1				
3	2	3	1			
4	6	11	6	1		
5	24	50	35	10	1	
6	120	274	225	85	15	1

Рис. 1

n-го многочлена обозначается символом $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Чтобы вычислить пятую возрастающую степень

$$x^{\overline{5}} = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} x^5 + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} x^1,$$

проще всего бесхитростно раскрыть скобки. Но мы поступим хитрее, заодно получим рекуррентные соотношения:

$$x^{\overline{5}} = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} x^1\right)(x+4) =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} x^5 + \left(4\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) x^4 + \left(4\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) x^3 +$$

$$+ \left(4\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) x^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} x^1,$$

таким образом,

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 1\,,\quad \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 10\,,$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 35\,,\quad \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 50$$

$$\text{и}\quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 24\,.$$

Вообще,

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1\,,\quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!\,,\quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

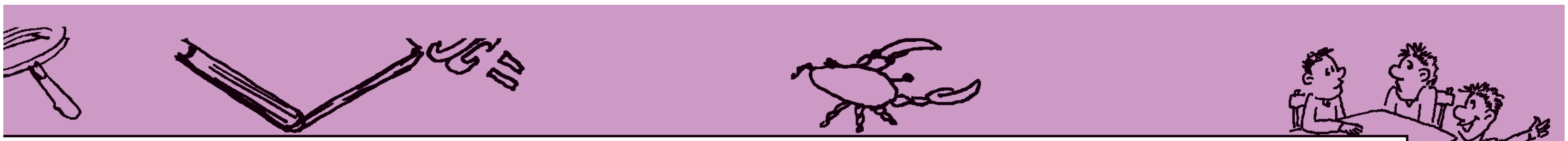
$$\text{и}\quad \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \quad \text{при } 1 \le k \le n\,.$$

Теперь – комбинаторика. Количество способов разбить n человек на k хороводов – это в точности число Стирлинга $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ (в хороводе может быть от одного до n человек). Доказать это легко по индукции: база – случай $n = 1$ – совершенно очевидна. А переход тоже несложен: если нужно разбить на k хороводов $n + 1$ человек, то либо первый их них образует отдельный хоровод, и таких способов ровно $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$, либо же надо сначала разбить остальных n человек на k хороводов, а затем поставить первого по правую руку от любого из n уже стоящих в хороводах людей.

Теперь начинаются чудеса Дж.Конвея. Выпишем в ряд бесконечную последовательность единиц и обведем в кружок те, номера которых – треугольные числа: 1, $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 4 = 10$, $10 + 5 = 15$, … Это – первая строка рисунка 2. Вторая и последующие строки получаются так: числа записываются только под необведенными числами предыдущей строки, каждое число должно равняться сумме чисел, расположенных непосредственно слева и сверху от него (первое число строки равно просто стоящему над ним числу), в кружок обводятся числа, стоящие наискосок влево-вниз от обведенных чисел предыдущей строки. Обведенные в кружок числа – это числа Стирлинга!

Чтобы объяснить это чудо, введем новые обозначения. Наш рисунок 2 разбивается на бесконечное число «треугольных» частей (на рисунке они отделены друг от друга вертикальными прямыми). Занумеруем их. На рисунке 3 изображен четвертый «треугольник». Число, стоящее в n-м треугольнике на пересечении i-й строки

[1] *Точнее, числа Стирлинга первого рода; бывают еще числа Стирлинга второго рода* $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ *– это количество разбиений множества из* n *элементов на* k *непустых подмножеств.*



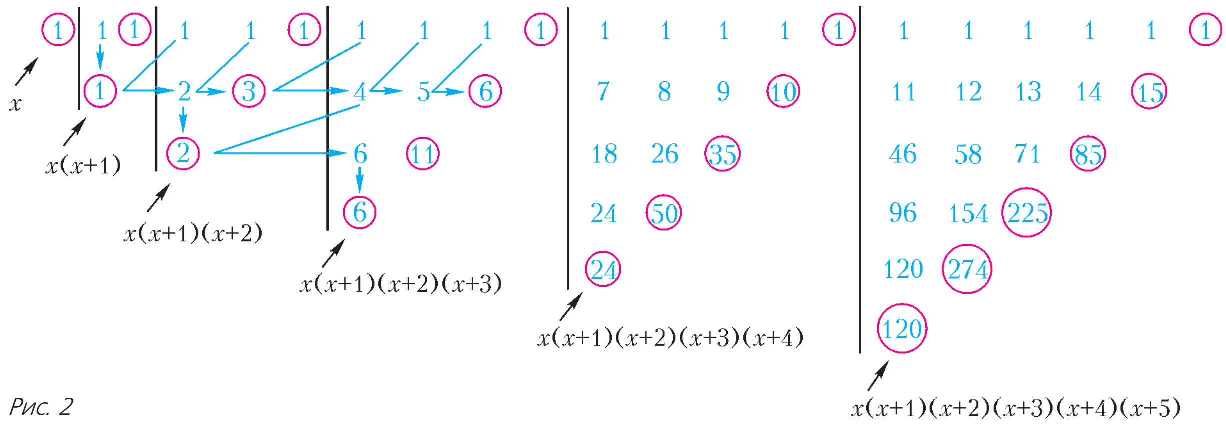


Рис. 2

и j-го столбца, обозначим $\begin{bmatrix} n \\ i,j \end{bmatrix}$ (столбцы треугольника нумеруются слева направо, а строки – снизу вверх). Для удобства обведенные в кружок числа предыдущего треугольника будем считать нулевым столбцом данного. Обозначения, приведенные рядом с четвертым треугольником на рисунке 3, поясняют сказанное. Оче-

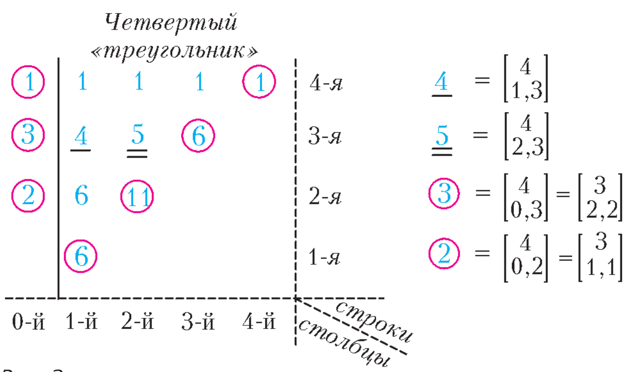


Рис. 3

видно, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k,k \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 0,n \end{bmatrix}$.

Вся таблица – не только обведенные в кружок числа Стирлинга! – удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и сами числа Стирлинга: например,

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2,4 \end{bmatrix} = 58 = 5 \cdot 8 + 18 = 5\begin{bmatrix} 5 \\ 2,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1,3 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3,4 \end{bmatrix} = 71 = 5 \cdot 9 + 26 = 5\begin{bmatrix} 5 \\ 3,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2,3 \end{bmatrix};$$

вообще,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m,k \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} n \\ m,k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ m-1,k-1 \end{bmatrix}.$$

Есть ли у чисел $\begin{bmatrix} n \\ m,k \end{bmatrix}$ комбинаторный смысл – мы не знаем. Может быть, тут нам помогут читатели?

Теперь – второе чудо. Если обвести не единицы с треугольными номерами, а каждое третье число (рис.4), то в нижней строке получим квадраты натуральных чисел! Более того, как и для чисел Стирлинга, ряды

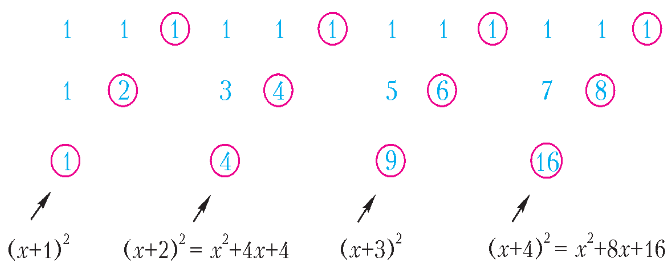


Рис. 4

обведенных кружочками чисел – это коэффициенты многочленов $(x+1)^2$, $(x+2)^2$, $(x+3)^2$, $(x+4)^2$, …

Если обведем каждую четвертую единицу (рис.5), то в нижней строке получим кубы. Соответствующие многочлены – это $(x+1)^3$, $(x+2)^3$, $(x+3)^3$, $(x+4)^3$, …

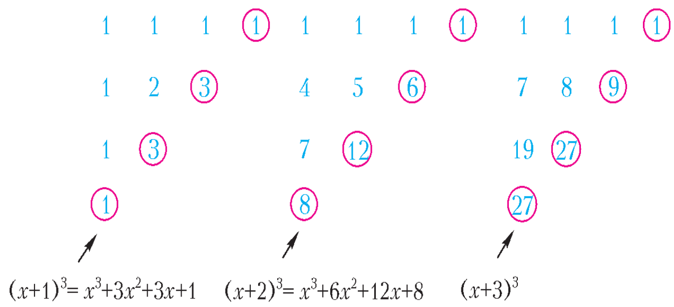
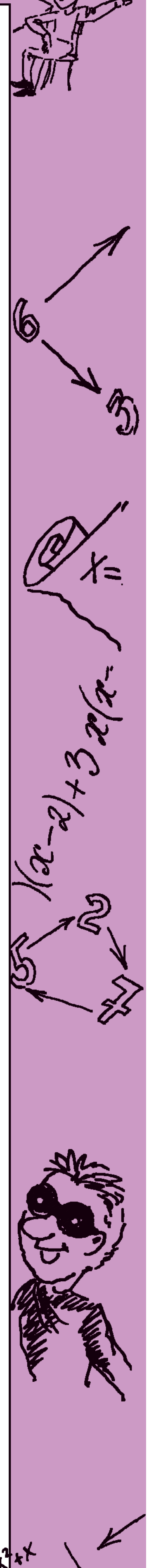


Рис. 5

Аналогичная закономерность верна и при обведении в кружок каждой пятой единицы. Более того, если $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4 \le \ldots$, то при обведении в кружок единиц с номерами n_1, n_1+n_2, $n_1+n_2+n_3$, $n_1+n_2+n_3+n_4$, … мы получим многочлены, которые замечательным образом разлагаются на множители. Как именно, рассказано в разделе «Ответы, указания, решения» в конце журнала.

А.Волгин (ученик 8 класса), А.Спивак



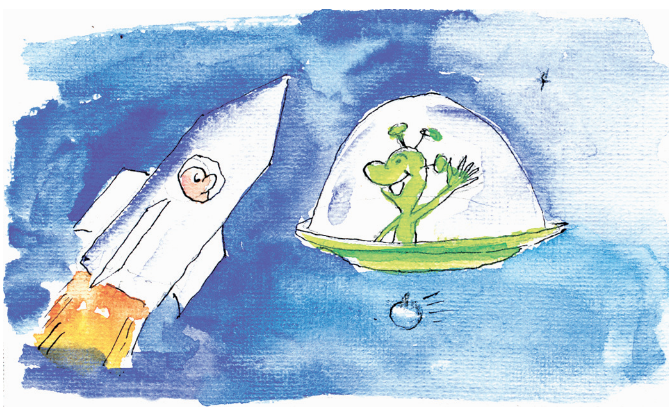
Задачи

1. В королевском архиве работают 40000 клерков с одинаковыми зарплатами. Король сказал министру, что среди клерков слишком много бездельников, за которых отдуваются остальные. Министр предложил сократить число клерков на 50%, зато повысить зарплату каждого оставшегося на 50% – общие расходы тогда не изменятся, бездельники будут уволены, а оставшиеся станут получать больше. Все ли правда в словах министра?

С.Дориченко

2. Космический корабль пролетел в космосе по замкнутой несамопересекающейся траектории. Могла ли длина этой траектории быть больше 1 миллиона километров, если корабль все время полета находился на расстоянии 10000 км от некоторой фиксированной точки пространства?

Г.Гальперин



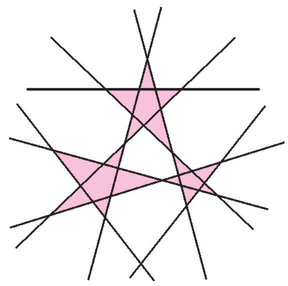
3. Вася и Петя ездят на каток от одной станции метро одну остановку. Однажды они отправились на каток, Петя шел позади Васи и не успел сесть в поезд, в котором уехал Вася, поэтому поехал в следующем поезде. Но из метро у катка Петя вышел раньше Васи. Как это могло произойти? (Ходят мальчики с одинако-

вой скоростью и движутся по одному маршруту, на этих станциях только по одному выходу.)

А.Романов

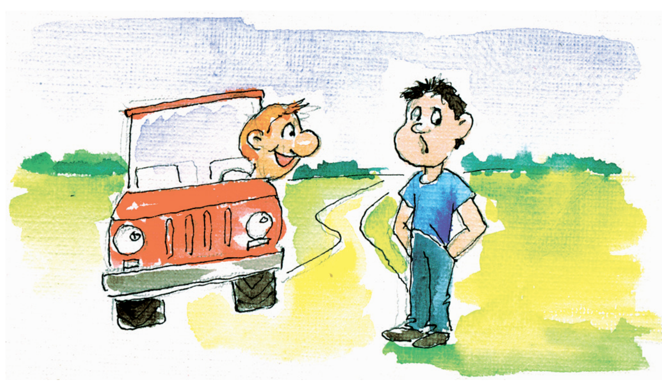
4. На плоскости девятью прямыми построены три звезды, как показано на рисунке. Можно ли пятнадцатью прямыми построить шесть не перекрывающих друг друга пятиконечных звезд?

Н.Авилов



5. Саша шел по краю дороги, посыпанной мелкой щебенкой, а навстречу ему ехал автомобиль. При встрече с автомобилем несколько мелких камушков, вылетевших из-под колес, задели Сашу. Куда попали камушки – в лицо или в спину?

А.Соколов



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

По воде и посуху

С.ДОРИЧЕНКО

По течению и против

Андрей, Даня, Миша и Федя собрались после уроков на математический кружок. До начала еще оставалось время, преподавателя в классе не было, но кто-то уже написал на доске несколько задач. Первая была такая.

Задача 1. *Двое ребят одновременно прыгнули с плывущего по реке плота и поплыли в разные стороны: первый – по течению, а второй – против. Через 5 минут они развернулись и вскоре вновь оказались на плоту. Кто вернулся раньше? (Каждый плыл равномерно со своей скоростью.)*

– Интересно, это для нас задача? – спросил Миша.

– Эх, сейчас бы на речку, куда интереснее, чем эти ваши задачи, – ответил Федя. – Да и вообще эта задача неправильная.

– Почему? – спросил Миша.

– Надо было еще сказать, что скорости этих двоих больше скорости течения, – сказал Федя. – Иначе тот, кто против течения прыгнул, не сможет от плота отплыть.

– А вот и нет, – возразил Даня. – Даже если его скорость равна скорости течения, он все равно от плота отплывет.

– Да что ты выдумываешь? – закричал Федя. – Ясно, что он тогда на одном месте будет барахтаться. Со мной так было один раз, плыву по речке изо всех сил против течения, а напротив меня елка растет здоровенная. Так я сколько ни греб, все время напротив этой елки был. Еле на берег потом выбрался. Очень река была быстрая.

– Ну хорошо, ты на одном месте будешь, но плот-то не будет тебя ждать, – заметил Даня. – Плот же не на берегу, как твоя елка, его река унесет.

– Вы меня совсем запутали, – сказал Федя. – Значит, если я даже медленнее течения плыву, я все равно от плота уплыву?

– Конечно. Ведь плот совсем течению не сопротивляется, а ты, хоть и слабо, но гребешь против.

– Ну и как тогда задачу решать?

Ребята молчали, каждый пытался сообразить, но решение не приходило.

– Ой, слушайте, у меня идея, – вдруг сказал Андрей. – Пусть у нас все на озере происходит. Ясно, что тогда оба вернутся одновременно: плот стоит, каждый плывет от него 5 минут и столько же времени возвращается.

– Но у нас-то река, а не озеро, – возразил Даня. – Еще течение добавляется!

– Ну и что? Река одинаково действует на все, что в нее попало – движет вперед со скоростью течения. А это значит, что его как бы и нет.

– Пожалуй, правда. Неужели все так просто?

– Конечно. А в туман, когда берега не видно, ты вообще реку от озера не отличишь!

– Придумал, придумал! – все посмотрели на Федю, который от волнения даже руками стал размахивать. – Я могу еще понятнее объяснить. У меня папа кинооператор, он боевик снимал, и там был похожий случай. Вот представьте, ехал бы он по берегу все время напротив плота и снимал его на пленку. Что бы мы потом на экране увидели?

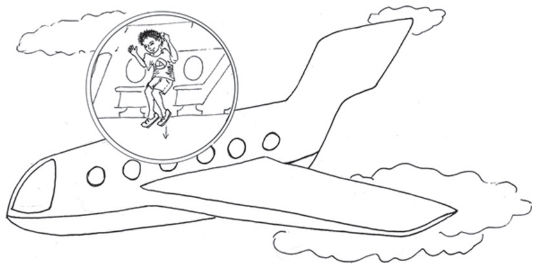
– Ничего особенного, – пожал плечами Даня. – В центре экрана плот стоит, а противоположный берег и деревья едут, как за окном в поезде.

– Нам берег сейчас не интересен, – строго сказал Федя. – Важно, что был бы неподвижный плот, причем на неподвижной воде! С него в разные стороны спрыгнули двое. За 5 минут каждый отплыл на свое расстояние и обратно проплывет его за те же 5 минут.

– Да, здорово, – сказал Андрей. – Кажется, это называется «перейти в систему отсчета, связанную с плотом», моему брату на физике рассказывали.

– Не умничай. А про поезд ты удачно вспомнил, как мы сразу не сообразили. – Федя просто сиял от удовольствия. – Река все вперед движет, как будто поезд или самолет. Вот если мы с тобой побежим в разные стороны по коридору летящего самолета и через пару секунд побежим обратно, то встретимся в исходной точке.

– Ага, – согласился Даня. – И если подпрыгнуть в самолете вверх, то приземлишься на то же место, откуда прыгал. Хоть у самолета скорость огромная, он из-под тебя не улетит.



– Это потому, – подхватил Андрей, – что у него относительно земли скорость большая. Но и ты летишь с той же скоростью. Вот для тебя самолет и неподвижен.

– Правда, когда я летел в самолете, – сказал Федя, – меня во время взлета в кресло так и вдавило. Попробовал бы я тогда подпрыгнуть. А если бы в коридоре стоял, так и покатился бы в хвост.

– Так самолет тогда скорость набирал, двигался с ускорением, – ответил Даня. – Это совсем другое дело. Не зря же во время взлета и посадки там ходить запрещается.

– Теперь понятно, почему в фильмах ковбои не боятся бежать по крыше поезда и с вагона на вагон прыгать, – не унимался Федя. – А это все равно, что по неподвижному составу бежать.

Иллюстрации М.Фейгельман

– Ну не совсем, – возразил Андрей, – там ведь на тебя встречный воздух давит. Ты когда подпрыгнешь, он тебя сразу тормозить начнет – воздух-то снаружи не движется вместе с поездом. Если поезд очень быстро едет, тебя вообще с крыши может ветром снести. А во времена ковбоев поезда медленно ездили, обычная лошадь могла поезд обогнать.

– Пока вы там спорили про своих ковбоев, я задачу решил алгебраически, с помощью уравнения, – замахал листком бумаги Миша. – Показать?

– Да и так все ясно. Ну ладно, показывай, не зря же ты старался.

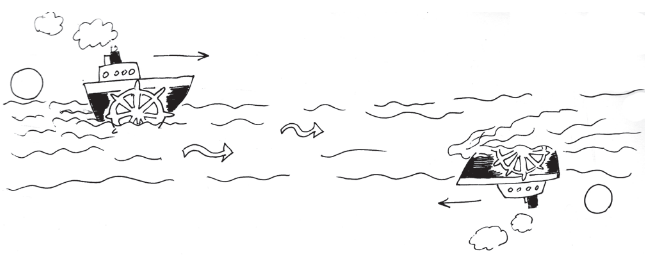
Ребята столпились над Мишиным листком.

– А у меня очень коротко. Пусть v – скорость реки, x – скорость первого, в метрах в минуту. Первый сначала плывет 5 минут по течению со скоростью $x+v$ относительно берега. Удалится он от плота на $5(x+v)-5v=5x$ метров. А следующие 5 минут он со скоростью $x-v$ преодолеет $5(x-v)=5x-5v$ метров и как раз встретит плот, проплывший за эти 5 минут $5v$ метров ему навстречу. Ну и для второго так же проверяется.

– У нас то же самое, только без всяких там x и v.

– Давайте и вторую задачу решим.

Задача 2. *Города А и В находятся на реке в 10 км друг от друга. На что у парохода уйдет больше времени: проплыть от А до В и обратно или проплыть 20 км по озеру?*



– Ну, эта задача еще проще, – сразу заявил Федя. – Когда пароход плывет по течению, ему река помогает. А когда против течения, ему река мешает и всю выгоду от полученной помощи съедает. Значит, одно и то же получается, что от A до B и обратно проплыть, что по озеру.

– Что-то тут не так, – засомневался Андрей. – Представь, что скорость парохода равна скорости течения. Он тогда в тот город, что выше по течению, вообще не сможет доплыть, не поборет течение. А по озеру запросто. Так что, наверное, по озеру всегда быстрее.

– А где у меня ошибка?

– Кажется, я понял. Вот ты говоришь, река помогает, мешает. А что это значит?

– Что же тут неясного?

– Помогает – значит каждую секунду еще на сколько-то вперед пододвигает, а мешает – каждую секунду на столько же обратно отодвигает, по сравнению с озером.

– Так и я то же самое говорю, только короче и понятнее.

– Да ты главное забыл. Пароход плывет вверх и вниз одно и то же расстояние. Но вниз он проплывает его быстрее, чем вверх. А значит, течение помогает ему меньше времени, чем мешает! Вот и получается, что выгода будет меньше, чем вред.

– Ах я дурак! Да, здорово. Выходит, по озеру быстрее.

– А я снова все посчитал, – сказал Миша.

– Слушай, ты, алгебраист-отличник. – набросился на него Федя. – Ну что тут писать, если уже и так все ясно.

– Видел я, как вам все было ясно. Вы запутались, вот я и составил уравнение. Я же не знал, что вы так скоро распутаетесь.

– Ладно, показывай. Эх, не охота проверять.

На листке было написано следующее:

v – скорость парохода
u – скорость реки (в км/ч)

10 км по течению: $\dfrac{10}{v+u}$ ч

10 км против течения: $\dfrac{10}{v-u}$ ч

всего: $\dfrac{10}{v+u}+\dfrac{10}{v-u}=\dfrac{20v}{v^2-u^2}$ ч

20 км по озеру: $\dfrac{20}{v}$ ч

$$\frac{20v}{v^2-u^2}>\frac{20}{v}\Leftrightarrow 20v^2>20\left(v^2-u^2\right)$$

– Я вычисления плохо понимаю, – сказал Федя, – я люблю без них обходиться. Так, есть у нас что-нибудь нерешенное?

На доске оставалась еще одна задача.

Задача 3. *Пароход вниз по реке идет от А до В трое суток, а от В до А – пять суток. Сколько времени будут плыть плоты от А до В?*

– Ой, а тут наверняка уравнение составлять придется, – помрачнел Федя. – Вот сказано, что вниз по реке пароход плывет трое суток, а вверх – пять. И что это значит?

– Да просто скорости их относительно земли относятся как 5 к 3, – сказал Андрей.

– Чьи скорости? – не понял Федя.

– Ну, парохода, который по течению плывет, и который против, – пояснил Андрей. – Можно даже так сказать: выпустим два одинаковых парохода, один вниз по течению, а другой вверх. Тогда если первый проплыл по реке 5 км, второй за это время проплывет 3 км.

– Да это же гениальная идея! – подхватил Даня.

– Какая еще идея?

– Да два парохода из пункта A одновременно выпустить в разные стороны. Только надо в этот момент еще и плот по течению отправить.

– А зачем? – удивился Федя.

– Так ведь плот все время посередине между пароходами будет, если расстояние вдоль реки считать! Вспомни задачу про ребят, которые с плота спрыгнули.

– Ух ты, классно! Пароходы – как будто те двое. А раз пароходы одинаковые, они удаляются от плота с равными скоростями. Только как нам это поможет?

– А вот как. Если первый пароход отплыл от A на $5x$ км, то второй – на $3x$ км, так? Плот в это время посередине между ними. А где эта середина будет-то?

– Расстояние между пароходами $8x$ км, половина это $4x$ км. Значит, плот будет… на расстоянии x км от пункта A вниз по течению.

– Вот мы задачу и решили. Нас интересует, когда плот окажется в пункте B, то есть x надо взять равным расстоянию между A и B. Первый пароход проплывет за это время пять расстояний от A до B, а одно такое расстояние он проплывает за трое суток. Значит, пять расстояний проплывает за 15 суток, это ответ.

– А я составил уравнение, там тоже совсем просто получается, – сказал Миша.

– Слушай, ты без своих уравнений просто жить не можешь, – рассердился Федя.

– Да вы посмотрите, всего три строчки. Обозначим расстояние между пунктами A и B за 1.

– Я не понял, 1 чего?

– Да какая разница. Есть же между ними какое-то расстояние. Можно его за единицу измерения принять. Помнишь, в мультфильме длину удава в попугаях измеряли? А мы будем измерять путь в расстояниях между A и B. Ничем не хуже километров. Так всегда делают для удобства, чтобы не вводить лишнюю переменную.

– Ладно, что дальше?

– Пусть скорость парохода – v, скорость течения – u наших единиц в сутки. Тогда по условию $3(v+u)=1$ и $5(v-u)=1$, откуда $v+u=1/3$, $v-u=1/5$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $2u=1/3-1/5=2/15$, то есть $u=1/15$. Значит, плот доплывет от A до B за 15 суток.

– И у нас ответ такой же.

– А я сам задачу придумал! Ура! – Андрей выбежал к доске и схватил в руки мел.

– Да ну…

– Нет, правда. Мне так первое решение про пароходы понравилось, что я сам задачу придумал. Вот решите-ка.

И Андрей написал на доске условие.

Задача 4. *Из пункта A вниз по течению прямой реки одновременно отплыли плот и катер, а навстречу им в тот же момент из пункта C отправился такой же катер. Докажите, что в тот момент, когда первый катер достигнет пункта C, плот окажется точно посередине между пунктом A и вторым катером.*

– Понятно, понятно, – закричал Даня. – Это практически та же сама задача.

Ребята быстро справились с задачей Андрея, и она им очень понравилась.

Упражнение 1. Решите и вы эту задачу.

Тут в класс зашел руководитель кружка Сергей Александрович.

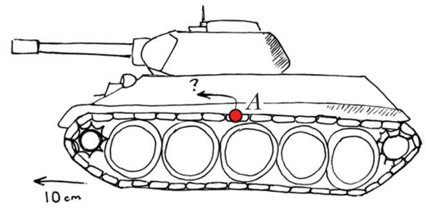
Про танк и эскалатор

Ребята принялись наперебой рассказывать учителю решения задач. А потом задали ему придуманную Андреем задачу и придирчиво проверили решение.

– Молодцы, – сказал учитель. – Можно сказать, без меня кружок провели, да еще замечательную задачу придумали. Но я для вас еще кое-что припас.

Задача 5. *На рисунке изображен танк, на его гусенице отмечена точка A. Танк проехал 10 см. Сколько проехала при этом точка A?*

– Тоже мне задача, для первоклассников что ли? – удивился Федя. – Раз танк проехал 10 см, то и точка A проехала 10 см.



– Это что же получается, точка A тогда все время находилась напротив середины танка? – спросил Даня.

– А что в этом такого?

– Так она ведь на гусенице, эта точка. Получается, что середина гусеницы и середина танка были все время напротив друг друга. Значит, гусеницы вообще не двигались. Как же тогда танк мог хоть сколько-то проехать?

– И правда, гусеницы же должны прокручиваться, – Федя задумался. – Вообще, когда на танк в кино смотришь, кажется, что они слишком быстро крутятся, быстрее, чем сам танк едет.

– Слушай, а давай на помощь твоего папу-кинооператора позовем. Пусть он едет напротив танка с кинокамерой и снимает.

– Давай, – обрадовался Федя. – Тогда на экране будет неподвижный танк, только колеса крутятся и гусеницы вращают. Чтобы танк в реальности сдвинулся на 10 см, земли должны коснуться новые 10 см гусениц, то есть им надо на эти 10 см прокрутиться вперед. Значит, точка A сдвинется на экране на 10 см. Опять эти же заколдованные 10 см получаются.

– Так ведь еще и наша кинокамера проехала 10 см! Значит, точка A проехала всего 10 + 10 = 20 см.

– Потрясающе! Даже не верится.

– Тем не менее, ответ именно такой, если, конечно, танк не игрушечный и точка A не успела доехать до переднего колеса, – подтвердил Сергей Александрович. – А сейчас я вас попробую еще раз удивить. Вот новая задача.

Задача 6. *Петя и Вася ехали вниз по эскалатору. На середине эскалатора хулиган Вася сорвал с Пети шапку и бросил на встречный эскалатор. Петя побежал вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься за шапкой вниз. Вася побежал вниз, чтобы затем подняться за шапкой вверх. Кто будет первым? (Скорости ребят относительно эскалатора равны и не зависят от направления движения.)*

– Сейчас, сейчас, – забормотал Федя. – Васе эскалатор сначала помогает, а когда он перебегает на встречный эскалатор… ой, опять помогает. А Пете, наоборот, эскалатор все время мешает. Значит, Вася первым прибежит.

– Постой, но шапка-то едет навстречу Пете, а от Васи удаляется, – заметил Миша.

– Тогда Петя добежит первый. Нет, я запутался, – сказал Федя. – А может, они одновременно добегут?

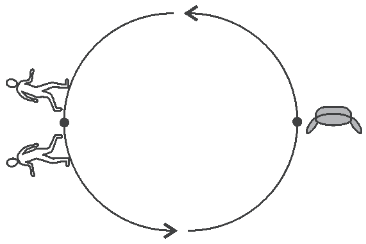
– Если бы эскалаторы не двигались, то конечно одновременно: каждому надо пробежать две половинки эскалатора.

– Наверное, тут, как в задаче про реку, можно считать, что эскалаторы стоят.

– Точно! – включился в разговор Даня. – Ведь мешает эскалатор так же, как и помогает. Вот и выходит, что он как бы Васю вместе с шапкой вперед двигает, а Петю вместе с шапкой – назад.

– Ага, понял – согласился Федя. – Значит, и расстояние между шапкой и любым из них сокращается, как если бы эскалаторы не двигались.

– Молодцы, – сказал учитель. – Давайте, я ваше рассуждение немного по-другому расскажу.



Учитель подошел к доске и нарисовал две полуокружности со стрелками.

– Это я изобразил эскалаторы, – сказал он, – а стрелки показывают, куда эскалаторы едут.

– А зачем вы так смешно эскалаторы кривыми нарисовали? – засмеялись ребята.

– Сейчас поймете. Когда один из мальчиков сбегает со своего эскалатора, он тут же на другой эскалатор перебегает. Давайте эти полуокружности-эскалаторы соединим в окружность. То есть один эскалатор у нас как бы сразу в другой переходит. Получается, что ребята как будто бегут по движущейся окружности.

– Ура! Все ясно. Сначала Петя с Васей и шапка будут в противоположных точках окружности. А потом побегут к шапке в разные стороны с равными скоростями. Ясно, что и прибегут одновременно. И не важно, крутится окружность или нет. Давайте следующую задачку!

– Погодите, мы еще эту не дорешали.

– Как это не дорешали? – очень удивился Федя. – Мы же доказали, что они одновременно прибегут, что тут еще делать?

– Этот ответ не совсем верный.

– Как? Но ведь мы же доказали, даже двумя способами. Вы что, шутите?

– Нет. Подумайте, мы кое-что не учли.

– Ну есть ведь еще расстояние между эскалаторами, – задумчиво протянул Даня. – Когда они его пробегают, они как бы ненадолго спрыгивают с окружности, а шапка все время к Пете едет. Он и будет первый.

– Очень дельное замечание. Но даже если ребята преодолевают расстояние между эскалаторами мгновенно, возможен случай, когда один из мальчиков прибежит к шапке раньше другого.

– А, ну конечно, – догадался Федя. – Если скорость Пети будет меньше или равна скорости эскалатора, он вообще до верха не дойдет. А шапка-то к нему на эскалатор не перескочит!

– Да, но и это еще не все: даже если скорости Пети и Васи больше скорости эскалатора, возможен другой ответ.

– Я понял, – закричал Андрей. – Федя сейчас подсказку сделал. Если они бегут не очень быстро, шапка может успеть доехать до верха эскалатора.

– И кто тогда прибежит к ней первым?

– Шапка перестанет приближаться к Пете и удаляться от Васи. Значит, Вася.

– Да, теперь все случаи разобраны.

Тут в класс заглянул учитель информатики Александр Прокофьевич.

Гонки на реке

– Что это тут у вас происходит? – спросил он. – Крики на весь этаж слышны.

– Да мы задачки интересные решаем про танки, эскалаторы, плоты, речки, катера...

– А я, между прочим, очень люблю в походы на байдарке ходить, – сказал Александр Прокофьевич. – И даже в одном походе сам задачу придумал, про гребцов. Хотите?

– Конечно, хотим! – закричали ребята. – Нам теперь такие задачи нипочем.

– А это мы посмотрим. Условие вот какое.

Задача 7. *Две байдарки стартовали из одной точки и движутся по одному маршруту по речке с переменным течением ровно по 4 часа. Первая байдарка все 4 часа движется со скоростью 3 км/ч относительно стоячей воды. Вторая байдарка движется со скоростью 6 км/ч относительно стоячей воды, но только первые 2 часа, а потом 2 часа гребцы отдыхают, а лодка движется по течению. Могло ли случиться, что вторая байдарка прошла по реке большее расстояние?*

– Это какая-то непонятная задача, – сразу сказал Федя. – Условие очень длинное. Когда до середины дойдешь, уже забудешь, что вначале было.

– Да еще и река с переменным течением. А мы такие задачи не решали, – сказал Миша.

– Ну и что? Попробуем. Давайте сначала задачу решим, как будто у нас река с постоянным течением, – предложил Андрей.

– Если течение постоянное, можно считать, что его нет: оно одинаково на обе байдарки действует, а плыли они одно и то же время, – заметил Даня.

– Ага. Значит, решаем для озера. – Андрей начал вычислять. – Первая байдарка пройдет за 4 часа 12 километров. А вторая уже за первые два 12 километров отмахает, зато следующие два часа на одном месте стоять будет. Поровну выходит!

– Ну вот, ничего не получается, – расстроился Даня. – Может и на реке с переменным течением всегда будет поровну?

– А чего тогда Александр Прокофьевич так хитро улыбается? – Федя подозрительно смотрел на учителя информатики. – Наверняка тут какой-то подвох есть.

– Стоп! Все ясно, – осенило Андрея. – На озере почему поровну получилось? Потому что вторая байдарка последние 2 часа на месте стояла. А давайте возьмем 12-километровое озеро и из него речку выпустим – хоть самую медленную, лишь бы текла. Первая байдарка только все озеро за 4 часа и проплывет. А вторая проплывет его за 2 часа и в речке окажется, вот ее речка и унесет дальше.

– Все хорошо, только у нас ведь не озеро, а река, – возразил Даня.

– Между прочим, на реке бывает и стоячая вода, и даже течение иногда в обратную сторону идет, – сказал Андрей. – Ну ладно, давай думать, как для реки пример строить.

– Я все не пойму, где второй байдарке лучше грести, – сказал Федя, – на быстром течении или на медленном?

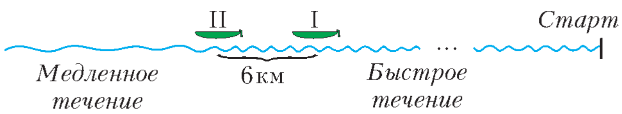
– Давай два случая разберем, – предложил Даня. – Допустим сначала, что первые два часа вторая байдарка гребет по очень быстрому течению, скажем 100 км/ч. А потом два часа сплавляется почти по нулевому течению.

– Разве бывают такие странные реки?

– А ты что, не знаешь, что на горных реках скорость течения очень сильно меняется? – сказал Андрей. – Русло у реки то разливается широко, и там вода медленно течет, то вдруг сужается в желоб между скал, и там струя так и хлещет, как из брандспойта. Правда, чтобы аж 100 км/ч было, это наверное перебор.

– Да не важно, бывают, не бывают, – отмахнулся Даня, – я сейчас хочу в принципе понять, что происходит. Поэтому очень разные скорости взял, чтобы эффект заметнее был.

– С таким гигантским течением обе байдарки за первые 2 часа примерно одно и то же огромное расстояние пройдут, – сказал Федя. – Только первая отстанет на 6 км.

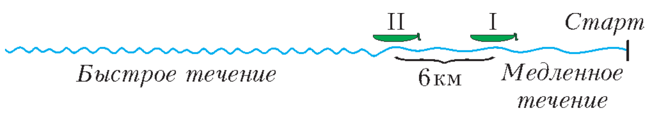


Через два часа после старта

– Зато за следующие два часа вторая байдарка вообще почти с места не сдвинется, – продолжил Даня. – А первая 6 км быстрого течения за несколько минут проплывет, а потом быстро вторую обгонит: отставания почти никакого, а скорость на 3 км/ч больше.

– А если наоборот, вторая байдарка сначала 2 часа почти по нулевому течению гребет, а потом течение 100 км/ч становится?

– Тогда за первые два часа вторая байдарка чуть больше чем 12 км проплывет, ну и первая снова на 6 км отстанет.



Через два часа после старта

Зато за следующие два часа вторая байдарка на 200 км вперед улетит. А первая только на 6 км до быстрого течения около 2 часов потратит. Ну и потом у нее времени почти не останется на быстром течении покататься.

– Теперь ясно. Только лучше числа правдоподобные подобрать.

– Я думаю, если взять скорость слабого течения 1 км/ч, а сильного 10 км/ч, тоже все получится, – сказал Миша.

Упражнение 2. Проверьте предположение Миши. Можно ли еще сблизить скорости течений?

– Что ж, справились, – обрадовался Александр Прокофьевич. – А на каком течении выгоднее грести, совсем просто можно объяснить. Представьте, что кто-то на месте старта каждую секунду бросает в реку листочек (начав это задолго до отплытия байдарок). На реке появится дорожка из листочков. Где течение быстрое, они будут плыть редко, а где медленное – часто. Обе байдарки движутся по 4 часа – значит, кто больше листочков обгонит, тот дальше и продвинется. Так где же выгоднее грести второй байдарке? Конечно, там, где листочки часто идут – за короткое время она обгоняет много листочков.

– Вот это да, – зашумели ребята. – Просто здорово, коротко и ясно!

– Ладно, буду теперь к вам заходить, задачки подбрасывать, – сказал Александр Прокофьевич, прощаясь.

– Пожалуй, и нам пора. Мы очень хорошо поработали. На сегодня все, – сказал Сергей Александрович.

Приключения со стрелками

– Ого, уже пять вечера, – важно посмотрел на свои часы Федя. – И правда, пора домой.

У Феди были большие красивые часы со стрелками, они светились в темноте. А все вокруг носили электронные часы или мобильник как часы использовали.

Феде и Дане идти было к одной станции метро, поэтому они вышли из школы вместе.

– Федь, ну зачем тебе такие часы? Это ведь прошлый век! – стал подшучивать над Федей Даня.

– Это чтобы задачки по математике решать, – ответил Федя. – Я сейчас в Заочной математической школе учусь, а там кучу задач про часы со стрелками задали. Вот я и сказал родителям: покупайте мне такие часы, а то школу брошу.

– Да ладно выдумывать, неужто из-за задачек носишь?

– Ну, если честно, мне такие больше нравятся просто. Но одну задачку я с помощью них решил, между прочим. Вот она какая была.

Задача 8. *Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки часов совпадают?*

– Ну и как же ты ее решил?

– Да вот, сначала все думал, думал – так ничего и не придумал. А потом взял, да и просидел рядом с часами целые сутки, и все совпадения сосчитал.

– Не спал целые сутки?

– Ну нет, понятно же, что если стрелки совпали, то в следующий раз еще не скоро совпадут. Я заметил, что они примерно раз в час совпадают. Днем я все время на часы поглядывал, чтобы момент не пропустить. А ночью будильник ставил – как стрелки совпадут, я на час засыпаю, потом просыпаюсь – они уже снова близко. Так и сосчитал.

– Ну ты даешь. Слушай, а ведь зря ты так себя мучил. Можно было гораздо проще сделать.

– Это как еще проще?

– Да просто прокрутил бы колесико на часах, чтобы часовая стрелка прошла 24 часа, и считал бы совпадения.

– Так нечестно. И вообще, как я, интереснее было.

– Да и что там считать, сам же сказал – стрелки раз в час совпадают. В сутках у нас 24 часа, значит, получаем 24 совпадения.

– А вот и нет. От одного совпадения до другого больше часа проходит.

– Ах да, конечно. Тогда наверное 23.

– Все равно неверно!

– Но должно же быть решение без круглосуточных наблюдений. Давай соображать. Часовая стрелка поворачивается со скоростью 1/12 циферблата в час, а минутная

(Продолжение см. на с. 57)

Семейство формул Лагранжа

И.КУШНИР

Возможно, не существует открытий ни в элементарной математике, ни даже, пожалуй, в любой другой области, которые могли бы быть сделаны без аналогии.

Д.Пойа

В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ABC (РИС.1) ОБОЗНАЧИМ AL БИССЕКТрису угла BAC. Формула Лагранжа имеет вид

$$AL^2 = AC \cdot AB - CL \cdot LB . \qquad (1)$$

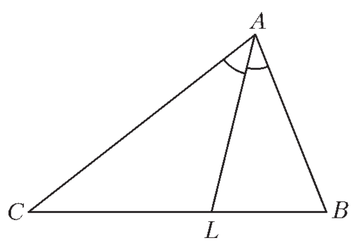


Рис. 1

Ее мы назовем первой формулой Лагранжа. В учебной литературе она известна еще с XVIII столетия, правда тогда биссектрису называли «равноделящей» («Собрание геометрических теоремъ и задачъ», составил Е.Прнивальский, издание седьмое, Москва, 1901 г.). Долгие годы доказательство формулы (1) было громоздким, да и сама она носила «подсобный характер» – с ее помощью биссектриса внутреннего (и внешнего) угла треугольника выражалась тремя сторонами a, b и c треугольника.

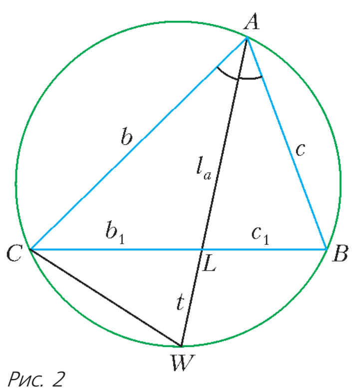


Рис. 2

На формулу обратили внимание, когда появилось ее доказательство с помощью вспомогательной окружности (рис.2). Вокруг треугольника ABC опишем окружность и продлим биссектрису AL до пересечения с окружностью в точке W. Обозначим $BL = c_1$, $CL = b_1$, $WL = t$, $AL = l_a$. Треугольники AWC и ABL подобны:

$$\frac{AW}{AB} = \frac{AC}{AL}, \text{ или } \frac{l_a + t}{c} = \frac{b}{l_a}, \text{ откуда } l_a^2 + l_a t = bc .$$

Но $l_a t = b_1 c_1$ (теорема о произведении отрезков хорд), и $l_a^2 = bc - b_1 c_1$. Формула (1) доказана.

Популярен и второй способ доказательства (с применением теоремы косинусов для треугольников CAL и BAL):

$$b_1^2 = b^2 + l_a^2 - 2bl_a \cos\frac{\angle A}{2}, \quad c_1^2 = c^2 + l_a^2 - 2cl_a \cos\frac{\angle A}{2} .$$

Сравнивая выражения для $\cos\frac{\angle A}{2}$ из обеих формул, получим

$$\frac{b^2 + l_a^2 - b_1^2}{2b} = \frac{c^2 + l_a^2 - c_1^2}{2c},$$

или

$$l_a^2 (b - c) = bc(b - c) - \left(cb_1^2 - c_1^2 b\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}, \text{ или } bc_1 = b_1 c ,$$

имеем

$$cb_1^2 - c_1^2 b = c_1 b_1 b - c_1 b_1 c = c_1 b_1 (b - c) .$$

Значит, $l_a^2 (b - c) = bc(b - c) - c_1 b_1 (b - c)$. Пусть $b \ne c$. Тогда $l_a^2 = bc - b_1 c_1$. Если $b = c$, формула (1) очевидно следует из теоремы Пифагора.

Формула Лагранжа и отрезок *AW*

Формулу (1) запишем в виде

$$l_a^2 = bc - l_a t \text{ (где } t = LW).$$

Тогда

$$l_a^2 + l_a t = bc, \text{ или } l_a (l_a + t) = bc .$$

Поскольку $l_a + t = AW$, то формулу (1) можно записать в виде

$$bc = l_a \cdot AW , \qquad (1^0)$$

или

$$\frac{AW}{b} = \frac{c}{l_a} . \qquad (1^1)$$

Получили еще один вид формулы Лагранжа. Может быть, запись в виде (1^1) привела к выводу формулы (1) с помощью подобия треугольников AWC и ABL. Это подобие мы назовем первым замечательным подобием.

В 1987 году на XXVIII Международной математической олимпиаде от Советского Союза была предложена и принята жюри моя задача[1]:

Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L, а описанную окружность треугольника в точке W (отличной от A); M и N – основания перпендикуляров, опущенных из точки L на стороны AB и AC. Докажите, что четырехугольник AMWN равновелик треугольнику ABC.

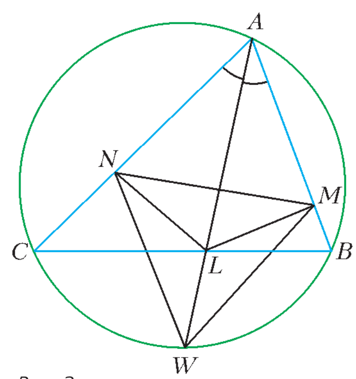


Рис. 3

Прошло почти четверть века, чтобы улыбнуться и сказать – решение очевидно: это формула Лагранжа (рис.3).

Действительно, для этого достаточно доказать формулу

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AW \cdot MN$$

(площадь четырехугольника с перпендикулярными диагоналями равна полупроизведению этих диагоналей). Воспользуемся формулой Лагранжа вида (1^0) $bc = AW \cdot l_a$ и домножим ее на $\frac{1}{2}\sin\angle A$:

$$\frac{1}{2} bc \sin\angle A = \frac{1}{2} AW \cdot l_a \sin\angle A . \qquad (\blacktriangle)$$

Поскольку вокруг четырехугольника можно описать окруж-

[1] *Буквы в условии изменены в соответствии с обозначениями этой статьи.*

ность с диаметром AL, то $l_a \sin\angle A = MN$, откуда

$$S = \frac{1}{2} AW \cdot MN, \qquad (1\text{-А})$$

а значит, мы решили задачу Международной олимпиады.

Однако, стоит в формуле (▲) «подвинуть» множитель $\sin\angle A$:

$$\frac{1}{2} bc \sin\angle A = \frac{1}{2} AW \sin\angle A \cdot l_a,$$

и мы получим новую формулу, которую, как и формулу (1-А), можно причислить к семейству формул Лагранжа:

$$S = \frac{1}{2} U_1U_2 \cdot l_a, \qquad (1\text{-Б})$$

где U_1, U_2 – основания перпендикуляров, опущенных из точки W на прямые AB и AC.

Вторая формула Лагранжа

С удовольствием процитирую выдающегося польского математика Стефана Банаха, одного из создателей современного функционального анализа (пространства Банаха):

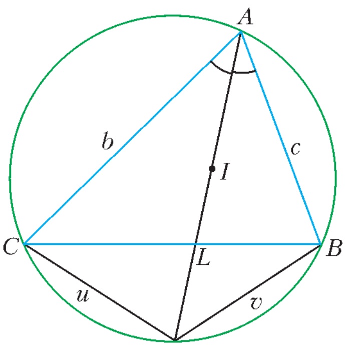


Рис. 4

«Математик – это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями; лучший математик – тот, кто устанавливает аналогии доказательств; более сильный математик – тот, кто замечает аналогии теорий; но можно представить себе и такого, кто между аналогиями видит аналогии».

По аналогии с выводом первой формулы Лагранжа выведем формулу для отрезка AW с помощью теоремы косинусов. Обозначим $BW = v$, $CW = u$ (рис.4). Имеем

$$BW^2 = c^2 + AW^2 - 2c \cdot AW \cos\frac{\angle A}{2}.$$

Выражая $\cos\frac{\angle A}{2}$ отсюда и из аналогичного равенства для CW^2, получаем

$$\frac{b^2 + AW^2 - u^2}{2b \cdot AW} = \frac{c^2 + AW^2 - v^2}{2c \cdot AW},$$

или

$$b^2c + AW^2 \cdot c - u^2c = bc^2 + AW^2 \cdot b - v^2b,$$

$$AW^2 \cdot (c-b) = bc^2 - v^2b - b^2c + u^2c,$$

$$AW^2 \cdot (c-b) = bc(c-b) + (c-b)u^2.$$

Мы учли, что $BW = CW = IW$, где I – инцентр (теорема трилистника). Пусть $b \neq c$. Тогда

$$AW^2 = bc + CW^2. \qquad (2)$$

Получили формулу, которую назовем второй формулой Лагранжа. Ее можно записать в виде $AW^2 = bc + IW^2$. Для $b = c$ формула (2) очевидна из теоремы Пифагора.

Выведем формулы, аналогичные формулам (1^0) и (1^1). Имеем

$$bc = AW^2 - IW^2, \text{ или } bc = (AW - IW)(AW + IW).$$

Поскольку $AW - IW = AI$, а $AW + IW = AI_a$ (I_a – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC (рис.5)), то

$$bc = AI \cdot AI_a, \qquad (2^0)$$

$$\frac{AI}{b} = \frac{c}{AI_a}. \qquad (2^1)$$

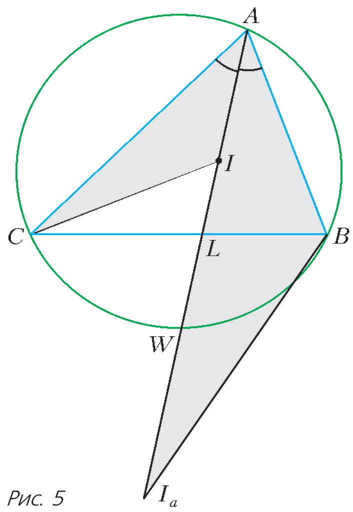


Рис. 5

Получили формулы, родственные формулам Лагранжа. Из формулы (2^1) следует подобие треугольников AI_aB и ACI, которое назовем вторым замечательным подобием.

Формулы (1^0) и (2^0) можно объединить и получить еще один вид формулы Лагранжа:

$$l_a \cdot AW = AI \cdot AI_a,$$

$$\text{или } l_a = \frac{AI \cdot AI_a}{AW}.$$

Учитывая, что $IW = WI_a$ и $CW = IW = \sqrt{AW \cdot WL}$ (докажите!), можно находить соотношения между отрезками, концами которых являются точки A, I, L, W, I_a (рис.6).

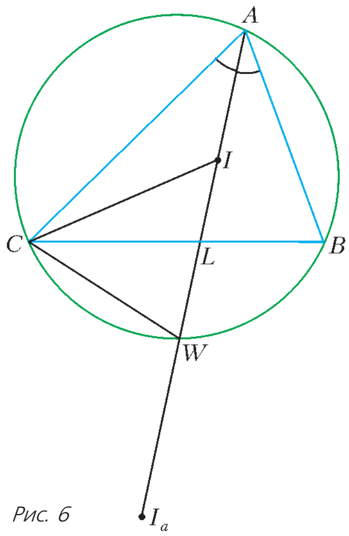


Рис. 6

Продолжая предложенный путь исследования, найдем формулы, аналогичные формулам (1-А) и (1-Б). Докажем, что

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} K_1K_2 \cdot AI_a \quad (2\text{-А})$$

(K_1 и K_2 – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC треугольника ABC; рис.7). По формуле (2^0) $bc = AI \cdot AI_a$. Домножим обе части равенства на $\frac{1}{2}\sin\angle A$. Учитывая, что вокруг четырехугольника AK_1IK_2 можно описать окружность с диаметром AI, получим

$$K_1K_2 = AI \sin\angle A,$$

а значит,

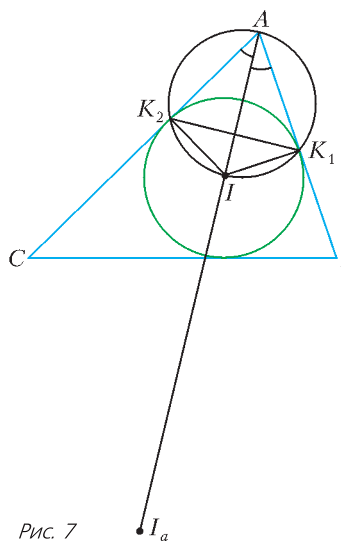


Рис. 7

$$\frac{1}{2} bc \sin\angle A = \frac{1}{2} AI \sin\angle A \cdot AI_a, \text{ или } S = \frac{1}{2} K_1K_2 \cdot AI_a.$$

Формула $S = \frac{1}{2} T_1T_2 \cdot AI$ (2-Б) доказывается аналогично (T_1 и T_2 – точки касания вневписанной окружности со сторонами AB и AC).

Думается, что количество формул семейства Лагранжа можно умножить. Успехов!

Задача про «Монгольфьер»

С.ВАРЛАМОВ

Дядя Федор решил сделать шар для полетов в воздухе и назвал его «Монгольфьер». Но прежде он проводит дома испытания уменьшенной модели такого шара, склеенной из папиросной бумаги с поверхностной плотностью $0{,}04$ кг/м^2. Модель имеет объем 1 м^3 и массу оболочки $m = 0{,}19$ кг. Шар подвешивается к потолку на нитке. Для заполнения шара горячим воздухом дядя Федор использует горючее вещество из папиной коллекции – этиловый спирт (C_2H_5OH) с удельной теплотой сгорания в воздухе $\lambda = 2{,}7 \cdot 10^7$ Дж/кг. Пренебрегая теплоемкостью оболочки и потерями тепла через стенки шара, он оценивает минимальное количество этилового спирта, которое необходимо сжечь, чтобы шар перестал натягивать нитку, на которой висит. Считается, что давление атмосферного воздуха $p = 10^5$ Па, его температура $t_0 = +20$ °C.

Схему химической реакции горения этилового спирта в воздухе можно представить в виде такого уравнения:

$$C_2H_2OH + 3O_2 + 12N_2 = 2CO_2 + 3H_2O + 12N_2 + Q,$$

где Q – количество теплоты, выделившееся при сгорании спирта. В написанном уравнении присутствует азот (в правильном соотношении к кислороду), хотя в самой химической реакции он не участвует (азот составляет примерно 80% состава воздуха, а кислород – только около 20%). В процессе полного сгорания спирта из каждых трех молекул кислорода (слева от знака равенства) образуются пять молекул продуктов сгорания (справа от знака равенства). До реакции в газообразном состоянии находилось пятнадцать молекул, а после реакции их стало семнадцать. Будем считать, что тепловая энергия выделилась в воздухе, который состоит только из двухатомных молекул и имеет среднюю молярную массу $\mathrm{M} = 0{,}029$ кг/моль.

Плотность материала оболочки шара значительно больше плотности окружающего шар воздуха, которая равна $\rho_0 = \mathrm{M}p/(RT_0) \approx 1{,}2$ кг/м^3. Чтобы шар перестал натягивать нитку, плотность ρ нагревшегося воздуха вместе с продуктами сгорания спирта внутри шара и объем V этой нагретой части воздуха должны соответствовать неравенству

$$(\rho_0 - \rho)V \ge m.$$

При этом температура воздуха внутри шара должна стать равной

$$T = T_0 \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Масса нагревшегося воздуха равна ρV, и нагрелся этот воздух на $\Delta T = T_0(\rho_0 - \rho)/\rho$ в процессе с постоянным давлением, т.е. с молярной теплоемкостью C_p. Следовательно, минимальное необходимое количество теплоты равно

$$Q = C_p \frac{\rho V}{\mathrm{M}} \Delta T = \frac{C_p m T_0}{\mathrm{M}}.$$

Для воздуха $C_p = 7R/2$. Отсюда минимальное количество спирта, которое нужно сжечь, составляет

$$m_{\text{сп}} = \frac{Q}{\lambda} = \frac{7RmT_0}{2\mathrm{M}\lambda} = \frac{7 \cdot 8{,}31 \cdot 0{,}19 \cdot 293}{2 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}7 \cdot 10^7} \text{ кг} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Получается, что минимальное количество спирта пропорционально произведению температуры окружающего воздуха и массы груза, который нужно поднять. Это количество не зависит от того, какая часть воздуха внутри шара прогрелась, лишь бы не было тепловых потерь наружу.

Теперь время задать главный вопрос: а хватит ли запасов папиной коллекции – приблизительно 0,8 л спирта, – чтобы оторвать от земли дядю Федора, если его масса 50 кг, а суммарная масса оболочки и корзины спроектированного им полномасштабного шара «Монгольфьер» равна массе мальчика, т.е. общая поднимаемая масса составляет $M = 100$ кг?

Для отрыва от земли дяди Федора вместе с корзиной и оболочкой шара «Монгольфьер» потребуется в M/m раз больше топлива, т.е. 1,1 кг спирта, а в папиной коллекции всего около 0,8 кг. Вывод: запасов в папиной коллекции не хватит.

Но у дяди Федора есть коварная (для папы) мысль: провести эксперимент зимой, тогда температура T_0 будет меньше, и топлива тоже потребуется меньше!

Заметим, что в наших расчетах мы с дядей Федором не рассматривали нагрев оболочки и тепловые потери через оболочку. Для анализа этих явлений и учета их влияния на результат эксперимента можно воспользоваться подсказками. Они есть, например, в статье «Путешествие на воздушном шаре», опубликованной в третьем номере «Кванта» за 2004 год.

Волна набегает на берег

А.КНЯЗЕВ

Посвящается Юлию Александровичу Данилову

Смотреть на бегущую воду – одно из любимейших занятий отдыхающего человека. Прошлым летом автор случайно обратил внимание на явление, мимо которого, наверное, проходил всю жизнь. Спасаясь от невероятной жары в Саратове, мы с другом на целых десять дней приехали в тихое место на Волге, где мы отдыхаем уже не первый год. Это было чудесно – у самой воды жара практически не ощущалась. Мы сидели на веранде и созерцали волны, бьющие в пологий песчаный берег в нескольких метрах от нашего домика. В сильный ветер волны были беспорядочные – они прокатывались вдоль берега и шлифовали песок в разных направлениях, выкидывая траву и пену. Но вот когда ветер умерял свой напор, волны становились довольно регулярными и похожими на синусоидальные валы, следующие один за другим. И тогда линия берега оказывалась периодически изъеденной глубокими зубцами (рис.1). После этого открытия созерцание перешло в стадию наблюдения и поиска гипотезы.

Автору, знакомому с радиофизикой и оптикой, показалось, что объяснить возникновение регулярного профиля песчаного берега довольно просто – достаточно вспомнить об интерференции волн. И действительно, поскольку волны периодически с одной и той же частотой и под одним и тем же углом ударяют о берег, то выпуклости на песке образуются в тех областях, куда приходятся максимумы волн. Эти максимумы всей массой воды ударяют в песок и создают горку. А в местах, приходящихся на минимумы регулярной волновой картины, песок остается нетронутым. Нетрудно подсчитать (рис.2), что период образующейся структуры равен $X = \dfrac{\lambda}{\sin\alpha}$, где λ – длина волны, а α – угол набегания волнового фронта вблизи самого берега. Однако уже в первый момент после получения формулы начинаешь осознавать необычность ситуации: стационарная картина образовалась у нас без участия второй системы волн, необходимой для возникновения интерференционной картины. Получается, что наблюдаемый рельеф не является результатом интерференции волн!?

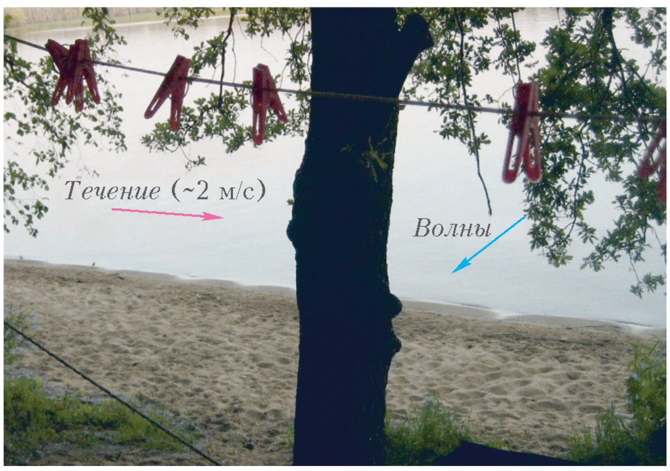


Рис. 1

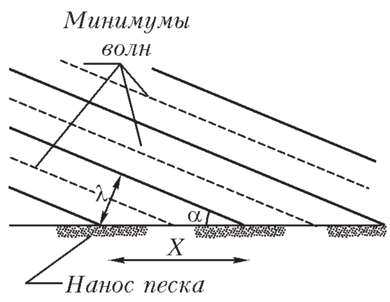


Рис. 2

По-видимому, причиной всему наличие соответствующей скорости сноса волновой картины за счет течения и мягкий песчаный берег, останавливающий набегающую волну и направляющий всю ее энергию на создание горки (далее эта вода просачивается вниз, разрыхляя песок). В результате волна не скользит вдоль берега, и каждый новый удар водяного вала приходится в одно и то же место. Пожалуй, именно это обстоятельство – практически полное отсутствие отраженных волн – и привлекло в какой-то момент рассеянное поначалу внимание автора.

Очевидно, что, когда волны нерегулярные, некогерентные, такой постоянной картины уже не наблюдается – она непрерывно возникает в разных местах, «съезжает» из одного положения в другое, и образующийся рельеф размывается. Не будем приводить иллюстрирующую фотографию – такое видел каждый.

На этом, собственно, можно было бы остановиться. Хотя нужно все-таки отметить, что описанный эффект наблюдается не так уж часто и держится буквально несколько часов. Так, волны, бегущие под очень острым углом, почти не останавливаются или достаточно хорошо отражаются. Волны с большой амплитудой заплескивают далеко на берег и также не образуют песчаного вала. Регулярный профиль не образуется и в тех местах, где берег жесткий. Так что автору в какой-то мере повезло.

И все-таки несколько смущает очень уж несинусоидальная форма образующегося профиля – возникшие между холмиками низины имеют слишком резкую форму. Впрочем, волны на воде тоже не имеют синусоидальный профиль. И это можно проверить, например... на рыбалке. Чтобы не отвлекаться от главного, об этом интересном факте будет сказано в Приложении к статье.

Итак, именно несинусоидальностью волн можно объяснить форму промытого на песке профиля. Однако современная физика все чаще говорит о необходимости учета в процессах формообразования так называемых нелинейных явлений, утверждая, что именно в их изучении заключается будущее развитие науки. В основе нелинейной физики лежит известный шахматный принцип: после каждого сделанного хода рекомендуется новая оценка позиции. Так и в физике – в анализируемой системе каждое явление, едва начавшись, изменяет саму систему, и на следующем шаге нужно учитывать произошедшие изменения.

Вот и мы присмотримся к наблюдаемому явлению, отталкиваясь от нашей элементарной теории возникновения рельефа. На фотографии, воспроизведенной на рисунке 3, видны несколько стадий того, что происходит в области минимума песчаного рельефа.[1] Да ведь это же самая на-

[1] *Лучше всего это было бы видно на видеоролике. Автор уверен, что уже в скором времени такие просмотры будут организованы в видеоприложениях к журналам. А пока читатели могут просто поспешить на берег речки и воочию увидеть все, что здесь описано. Нужно лишь набраться терпения.*

Рис. 3

стоящая кумулятивная струя, промывающая едва заметный поначалу минимум! Вода, не успевшая просочиться и скатывающаяся с песчаных холмиков, мощным выстрелом выплескивается из области интерференционного минимума при схлопывании возникшей водяной ямки. Здесь мы не будем объяснять, что такое кумулятивный эффект.[2] Сейчас каждый слышал о кумулятивных снарядах и даже может почувствовать кумулятивный эффект на себе, когда шлепает по лужам, моет чашку под струей вертикально падающей из крана воды или когда оказывается облитым водой от проехавшего по луже автомобиля.

Теперь, по-видимому, стало яснее, как возникает наблюдаемый профиль береговой линии. Впрочем, наблюдения можно и продолжить. Заметим, например, что длина волн, создающих кумулятивную ямку, раз в сто меньше, чем длина основных волн. Дело в том, что вторичные волны стекающей воды имеют совершенно другую физическую природу – это уже капиллярные волны, в отличие от первичных гравитационных волн. Вот к чему приводит действие нелинейных эффектов в такой простой, казалось бы, ситуации, как набегание волны на берег!

Нечто похожее может проявляться и в других подобных явлениях, например в физике электронных приборов, в коллективных биологических явлениях, да мало ли где еще. А может, примерно так сформировались знаменитые норвежские фиорды? Подобный подход, объединяющий ученых из далеких областей знаний, сейчас называют синергетическим. Мой хороший знакомый, математик, переводчик многих интересных книг и очень светлый человек Юлий Александрович Данилов говорил, что если смешать в мешке линейные и нелинейные эффекты, то выбранный затем наугад эффект почти наверняка окажется нелинейным.

Приложение. Как визуально оценить синусоидальность волны

Решение данного вопроса хорошо описано, например, в книге С.М.Рытова «Введение в статистическую радиофизику» (М.: Наука, 1976). Однако добраться до нее доведется не каждому читателю, да и книга в целом довольно сложная. А вопрос очень интересный.

Простое наблюдение за спокойными волнами на воде дает ощущение их синусоидальности. Приглядевшись, можно заметить, что эти волны часто имеют плоское донышко и обостренную вершинку (рис.4). Любознательные читатели знают, что поплавок, например, качается в воде не поступательно вверх-вниз, а движется по эллиптической или циклоидальной траектории. Однако и с такими знаниями трудно представить, как все это связано с профилем волны. Конечно, можно провести измерения или найти уже готовое решение в гидродинамике (нелинейные волны), однако в физике в ряде подобных ситуаций для упрощенной оценки характеристики явления используют понятие вероятности.

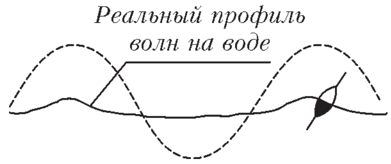


Рис. 4

Казалось бы, при чем здесь вероятность, ведь процесс является обусловленным, детерминированным? Обычно в классическом естествознании предполагается, что всю цепочку трудноопределимых событий, приведшую к данному исходу, в принципе можно восстановить. «Бог не играет в кости», – на этом тезисе настаивал Альберт Эйнштейн. Полученный вероятностными методами результат воспринимается здесь, скорее, как промежуточный на данном этапе решения задачи – как оценку, сделанную преднамеренно с целью упрощения или от неполноты сегодняшних знаний. При таком подходе случайность можно рассматривать как явление, мешающее и путающее планы.

В нашем случае в роли случайности интуитивно выступает многообразие возможных форм волн. Предположим, что волны все-таки синусоидальны, и определим вероятность того, что в некоторый в момент времени t мы застанем колебательный процесс вида $u = u_m \sin \omega t$ в небольшом интервале значений от некоторого u до близкого значения $u + du$. С одной стороны, значение искомой вероятности dW с очевидностью пропорционально выбранному нами интервалу значений du. Запишем поэтому простейшую линейную пропорциональность:

$$dW = f(u)\,du$$

– чем больше выбранный интервал, тем с большей вероятностью можно предугадать благоприятный исход. Коэффициент $f(u)$, зависящий от выбранного значения, называют функцией распределения данного значения в исследуемом процессе. Пока эта функция неизвестна, но ее получение решает всю задачу. С другой стороны, физическую вероятность можно интуитивно (пока ограничимся этим) определить как отношение времени существования благоприятного исхода ко всему периоду колебаний:

$$dW = \frac{2dt}{T}.$$

Приравняв оба выражения для вероятности, получаем

$$f(u) = \frac{2}{T}\frac{1}{du/dt}.$$

Отдельно вычислим необходимую здесь производную нашей функции $u = u_m \sin \omega t$:

$$\frac{du}{dt} = u_m \omega \cos \omega t = \frac{2\pi\, u_m}{T}\sqrt{1 - \left(\frac{u}{u_m}\right)^2}.$$

Окончательно имеем

$$f(u) \sim \frac{1}{u_m}\frac{1}{\sqrt{1-(u/u_m)^2}}.$$

Из графика функции распределения (рис.5), видно что наибольшая веро-

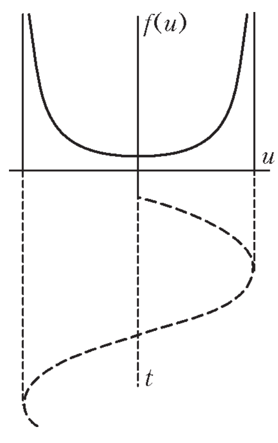


Рис. 5

[2] *О кумулятивном эффекте можно прочитать, например, в статьях В.Майера «Поучительный опыт с кумулятивной струей» («Квант», 1976, №4) и И.Воробьева «Физика в ложке воды» («Квант», 1994, №4), а также в книгах Л.К.Белопухова «Физика внезапного» (Библиотечка «Квант», вып.116) и В.В.Майера «Кумулятивный эффект в простых опытах» (М.: Наука, 1989).*

ятность соответствует одному из крайних состояний – здесь гармонический колебательный процесс проводит наибольшее время. Тогда как вероятность застать случайный процесс в момент прохождения точки равновесия оказывается минимальной.

Рассмотрев совершенно детерминированный процесс с позиций случайных процессов, мы заметили нечто новое. Действительно, если бы волны в пруду или на озере были синусоидальными, то поплавок проводил бы наибольшее время в крайнем верхнем или в крайнем нижнем состоянии. Однако такого не случается – поплавок качается достаточно плавно, без зависания в крайних точках. Значит, эти волны не синусоидальны, вопреки бытующим взглядам. Как, оказывается, полезно иметь несколько точек зрения!

Однако несинусоидальность наблюдаемых волн не помешала нам использовать самые общие соображения об интерференции и когерентности. Действительно, такие основные черты этих явлений, как возможность наложения волн, представления о длине волны и стационарности, к нашим волнам вполне применимы. А математические соотношения, например условия максимумов и минимумов или связь скорости с длиной волны, мы здесь не использовали. При необходимости можно попытаться получить и их. Но это будет уже другая теория.

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

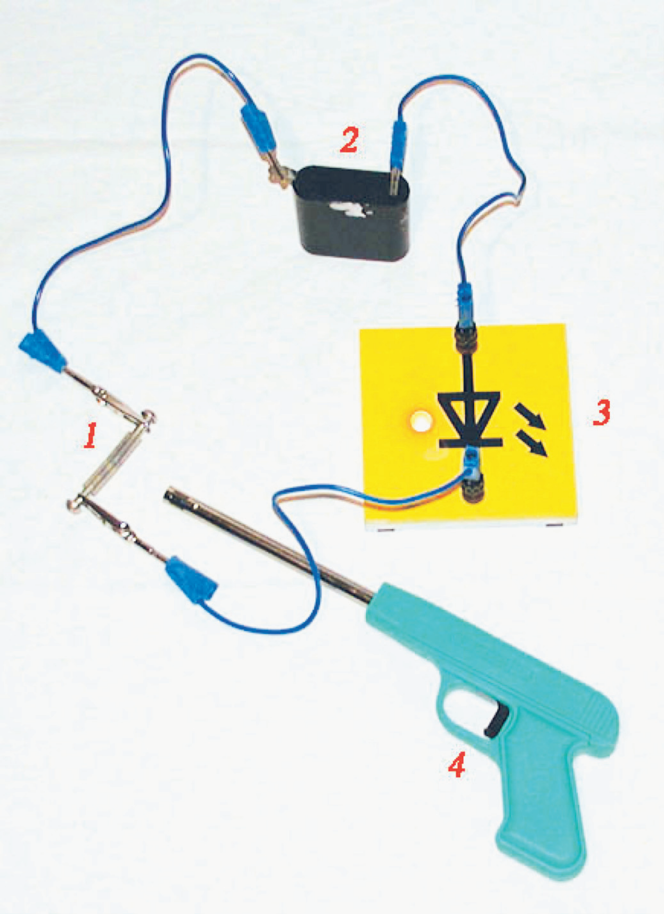
Почувствуй себя А.С. Поповым!

(Начало см. на 4-й странице обложки)

… Возьмите два одинаковых болта диаметром 4–5 мм и гибкую пластиковую, например силиконовую, трубку длиной 50 мм, внутренний диаметр которой чуть меньше диаметра болта. С помощью напильника сделайте торцевую поверхность болтов гладкой и ровной. Вкрутите один из болтов внутрь трубки почти до ее середины. Потом возьмите железный гвоздь и напильником изготовьте небольшое количество железных опилок. Поставьте трубку с болтом вертикально и засыпьте опилки в ее открытый конец – они должны заполнить трубку приблизительно на 1 мм ее длины. Теперь вкрутите второй болт так, чтобы сопротивление между болтами составило 10–50 кОм. Когерер готов.

Чтобы убедиться в том, что когерер «работает», возьмите пьезоэлектрическую зажигалку, дающую только искру, без пламени (такую зажигалку можно купить за 50 рублей в магазине). Если когерер сделан правильно, то искра будет уменьшать сопротивление когерера до сотен, а иногда и до десятков ом. После этого, слегка постучав по когереру, можно опять привести его в рабочее состояние.

Работу когерера можно сделать видимой, и не используя измеритель сопротивлений. Соберите очень простую



схему (см. рисунок) из когерера *1*, батарейки *2* с ЭДС 4,5 В и светодиода *3*, включенных последовательно. Сопротивление когерера сначала оказывается довольно большим, и светодиод не горит. Если искра зажигалки *4* возникнет на расстоянии не больше 20 см, то сопротивление когерера упадет, и светодиод загорится.

Так можно действительно почувствовать себя А.С. Поповым!

К. Богданов

Для учителей физики и учащихся, интересующихся физикой, в Санкт-Петербурге в апреле 2010 года прошел фестиваль «Физический фейерверк». Фестиваль организовали физико-механический факультет Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, факультет физики Российского государственного педагогического университета им. А.И.Герцена и ГОУ средняя школа 210 Центрального района Санкт-Петербурга.

На ученической конференции фестиваля были представлены разнообразные интересные работы учащихся, проводимые под руководством учителей школ, преподавателей и научных сотрудников вузов. Некоторые доклады были рекомендованы к публикации.

Так, *Юрий Веснин* и *Александр Ротов* (школа 138) выступили с работой «Исследование лобового сопротивления тел разной формы с применением видеоанализа» (руководитель работы – И.Я.Филиппова, научный консультант – Н.Н.Филиппов). Использованный ребятами экспериментальный метод видеоанализа с помощью программы Multilab позволяет проводить измерения коэффициента лобового сопротивления тел без применения аэродинамической трубы.

Екатерина Погужельская (лицей 82) докладывала о своей работе «Исследование баллистического маятника» (руководитель – Д.А.Порохов, консультант – Р.Г.Полозков). Проведенный эксперимент показал, что баллистический маятник надо рассматривать как модель физического, а не математического маятника.

Александра Шамова (гимназия 363) выбрала темой своих исследований микроволновую печь (руководитель – О.В.Орлова). Подробнее – в публикуемой ниже статье.

Микроволновая печь

А.ШАМОВА

Каков принцип действия микроволновой печи? Что такое микроволны? Какова природа их возникновения? Какое воздействие они оказывают на биологические ткани и продукты питания? Опасно ли их влияние на здоровье человека? Такие вопросы я поставила перед собой, начав работу над рефератом.

Изобретение микроволновой печи – это изобретение совершенно нового способа приготовления пищи. В 30-х годах XX века одновременно в разных странах велись работы над получением мощных радиоволн сверхвысокочастотного диапазона. Эти радиоволны научились использовать прежде всего в радиолокаторах. В 1945 году американский инженер Перси Спенсер проводил эксперимент с магнетроном – радиолампой, генерирующей радиоволны в СВЧ-диапазоне. По существующей легенде, Спенсер взял несколько зерен кукурузы и поместил их возле магнетрона – через несколько минут из зерен получился попкорн. То же самое он проделал с сырым яйцом. Яйцо, оставшееся снаружи холодным, в центре почти мгновенно вскипело под действием электромагнитных волн. Вскоре фирма, в которой работал Спенсер, получила патент и начала серийное производство устройства под названием «радарная печь». Первая бытовая микроволновая печь появилась на рынке в 1955 году.

Микроволновая печь устроена так, что в ней энергия электрического тока преобразуется в энергию электромагнитных волн. В бытовых микроволновых печах используются волны, частота которых составляет 2450 МГц. Такая частота выбрана для того, чтобы не создавать помех работе радаров и иных устройств, использующих микроволны. Источником излучения является высоковольтный вакуумный прибор – магнетрон. Для охлаждения магнетрона рядом с ним имеется вентилятор, непрерывно обдувающий его воздухом. Вентилятор обеспечивает принудительную конвекцию воздуха в полости печи с одновременным его подогревом, что способствует равномерному прогреву продуктов. Микроволны с магнетрона поступают в печь по волноводу – каналу с металлическими стенками, отражающими СВЧ-излучение. Очень важным элементом является дверца печи. Она должна обеспечивать возможность обзора и исключать выход микроволн наружу. Это достигается за счет многослойного «пирога» из стеклянных или пластмассовых пластин. Между пластинами обязательно есть сетка из перфорированного металлического листа. Металл отражает микроволны назад, в полость печи, а маленькие отверстия перфорации (менее 3 мм) не пропускают СВЧ-излучение. По периметру дверцы вмонтирован уплотнитель из диэлектрического материала.

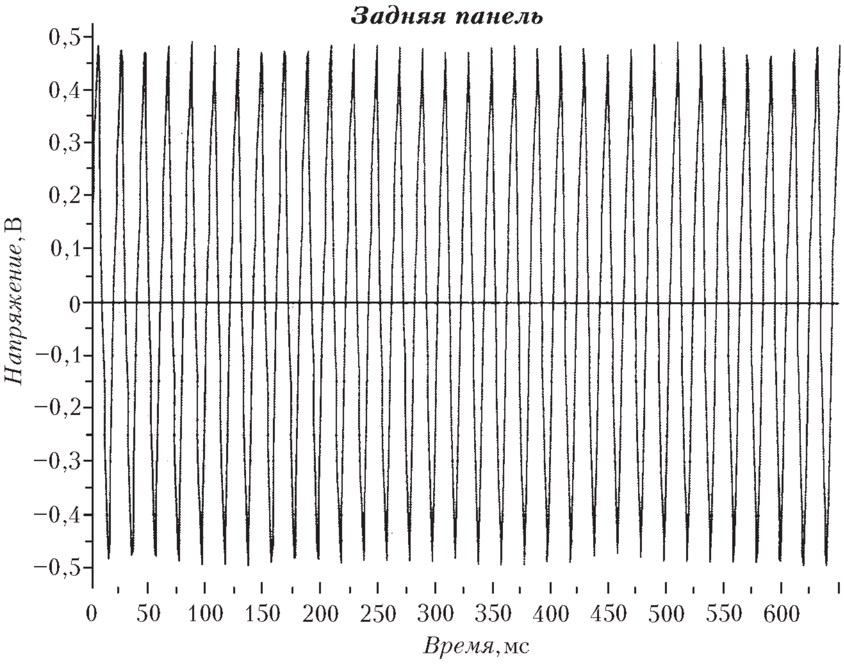
Чтобы нагреть продукт с помощью микроволн, необходимо присутствие в нем дипольных молекул, т.е. таких, на одном конце которых сконцентрирован положительный электрический заряд, а на другом – отрицательный. Таких молекул в пище много – это молекулы жиров, сахаров и воды. В электрическом поле молекулы выстраиваются строго по направлению силовых линий поля – «плюсом» в одну сторону, «минусом» в другую. Стоит полю поменять направление на противоположное, как молекулы тут же переворачиваются на $180°$. Поле волны, в котором находятся эти молекулы, меняет полярность 4900000000 раз в секунду! Под действием микроволнового излучения молекулы поворачиваются с бешеной частотой, сталкиваются и ударяются одна о другую. Выделяющееся при этом тепло и служит причиной увеличения температуры пищи. Заметим, что нагрев продуктов происходит в результате прогрева микроволнами поверхностного слоя и дальнейшего проникновения тепла в глубину продукта за счет теплопроводности (как и в обычной духовой печи).

Для микроволнового приготовления пищи совершенно непригодна металлическая посуда. Микроволны не проникают сквозь металл, а отражаются от него. Это может вызвать электрический разряд (дугу) и нанести вред печи. Кроме того, отраженные микроволны могут проходить через стекло дверцы, что небезопасно для здоровья. Напротив, посуду из стекла использовать можно, но при условии, что она выдержит высокую температуру нагрева. Глина и пористая керамика поглощают микроволны, при этом такая посуда задерживает влагу, поэтому нагревается сама, вместо того чтобы пропустить микроволны в пище.

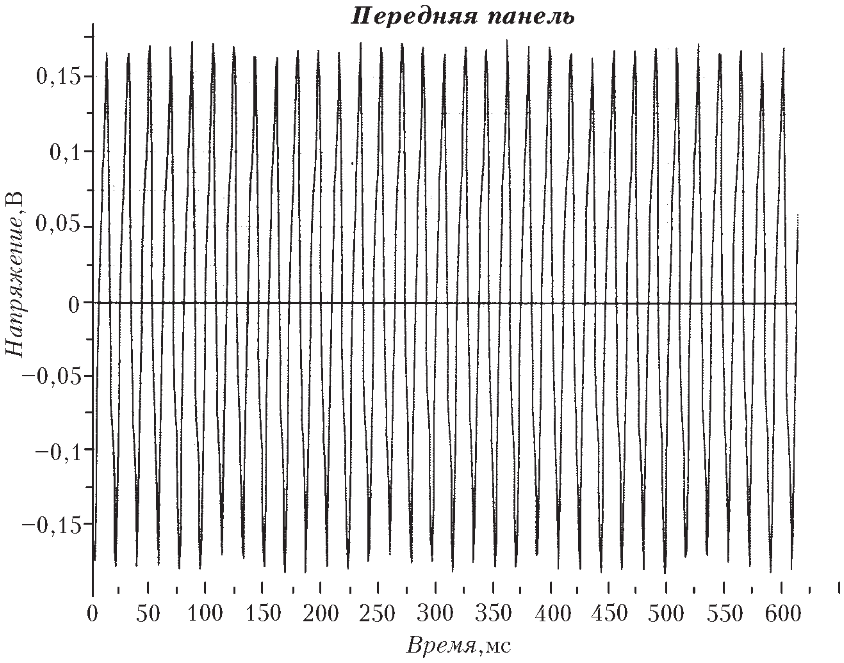
Хорошо известно, что микроволны не оказывают никакого радиоактивного воздействия на биологические ткани и продукты питания. Помимо того, приготовление пищи при помощи микроволновой печи требует очень небольшого количества жиров, поэтому такой способ приготовления пищи полезнее для здоровья и не представляет для человека никакой опасности.

Конструкцией печи предусмотрены жесткие меры для предотвращения выхода излучения наружу. Хотя непосредственное воздействие микроволн может вызвать ожог, риск при правильном использовании исправной печи полностью

Задняя панель



Передняя панель



отсутствует. Микроволны очень быстро затухают в атмосфере – уже на расстоянии полуметра от печи излучение становится в 100 раз слабее. Достаточно отойти от печи на расстояние вытянутой руки, и можно чувствовать себя в полной безопасности.

Целью практической части работы было:

1) обнаружить электромагнитное излучение, появляющееся в процессе работы СВЧ-печи;

2) найти зависимость интенсивности излучения от расстояния до печи, от режима работы печи и от места приемника излучения;

3) определить наличие ионизирующего излучения вблизи СВЧ-печи.

В работе использовалось такое оборудование: цифровая лаборатория «Архимед» – регистратор с частотой замеров 1000; датчик напряжения ±25 В ; катушка дроссельная (2400 витков с сердечником) индуктивностью 25 Гн; микроволновая печь (LG) мощностью 800 Вт; компьютерный измерительный блок (L-микро); счетчик Гейгера (счетчик ионизирующего излучения).

Так как электромагнитная волна является совокупностью периодически изменяющихся магнитного и электрического полей, распространяющихся в пространстве, приемником такой волны может служить дроссельная катушка, в которой под действием вихревого электрического поля, согласно явлению электромагнитной индукции, появляется индукционный ток. Датчик напряжения, подключенный к катушке, позволяет регистрировать амплитуду и частоту электромагнитной волны.

В ходе исследований при работе СВЧ-печи было обнаружено электромагнитное излучение, частота которого равна 50 Гц, микроволны же обнаружены не были. Это позволило сделать вывод, что печь хорошо экранирована, а зафиксированное излучение испускается трансформатором, питающим магнетрон.

Опыт 1. Располагая катушку на одном и том же расстоянии (10 см) с разных сторон печи, получили, что максимальная интенсивность обнаруженного излучения наблюдается со стороны задней панели (вблизи магнетрона), минимальная – со стороны передней панели (см. рисунок).

Опыт 2. Не меняя расположения катушки (расстояние 10 см, задняя панель), проводили измерения при разных режимах работы. Зафиксировали, что максимальная интенсивность (максимальное напряжение около 0,5 В) наблюдается при мощности 900 Вт, минимальная (максимальное напряжение порядка 0,2 В) – при 90 Вт.

Опыт 3. Располагая катушку на расстояниях 5, 10, 15, 20, 25 см от задней панели микроволновой печи, наблюдали, что с увеличением расстояния интенсивность излучения уменьшается. Так, на расстоянии 5 см датчик показывал максимальное напряжение 1 В, на расстоянии 10 см – 0,45 В, на 15 см – 0,27 В, на 20 см – 0,15 В.

Опыт 4. С помощью счетчика Гейгера определяли наличие ионизирующего излучения вблизи печи. Так как средний уровень радиации не менялся, мы сделали вывод, что ионизирующего излучения вокруг СВЧ-печи нет.

Результаты проведенных экспериментов подтвердили гипотезу, выдвинутую нами на основании изученной теории.

Однако, несмотря на то, что печь является безопасной для здоровья человека, следует соблюдать некоторые меры предосторожности в обращении с прибором. Например, нельзя нагревать жидкость в герметично закрытых емкостях, а также варить птичьи яйца, поскольку из-за сильного испарения воды они могут взорваться. Нельзя включать пустую печь, т.е. без единого предмета, который поглощал бы микроволны. Не встречая на своем пути никаких препятствий, микроволны в этом случае будут многократно отражаться от внутренних стенок полости печи, а сконцентрированная энергии излучения может вывести печь из строя.

КПД термодинамических циклов

В.ДРОЗДОВ

Указанная в заглавии статьи тема фактически завершает школьный курс термодинамики. Поэтому для решения задач на определение КПД циклов требуется знание почти всего предшествующего материала. В силу этого обстоятельства, такие задачи часто используются для проверки знаний учащихся на экзаменах, в том числе и в форме ЕГЭ.

Коэффициент полезного действия η термодинамического цикла определяется по формуле

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, подведенное к рабочему телу (газу) за цикл от нагревателя, Q_2 – количество теплоты, отданное рабочим телом за цикл холодильнику, $A = Q_1 - Q_2$ – работа газа за цикл.

Ограничимся случаем, когда рабочим телом является идеальный одноатомный газ. Согласно первому закону термодинамики, количество теплоты Q_{12}, полученное идеальным газом при переходе из состояния *1* в состояние *2*, равно сумме изменения внутренней энергии газа и совершенной им работы:

$$Q_{12} = (U_2 - U_1) + A_{12}.$$

Внутренняя энергия идеального одноатомного газа с учетом уравнения Клапейрона–Менделеева может быть записана в виде

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV,$$

где ν – количество молей газа, T – температура газа, p – его давление, V – объем, R – универсальная газовая постоянная. Работа газа A_{12} численно равна площади под графиком зависимости давления от объема, выраженной в энергетических единицах (в СИ – в джоулях).

Теперь переходим к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. *Найдите КПД цикла, изображенного на рисунке 1.*

Решение. Легко видеть, что работа газа за цикл равна

$$A = \frac{1}{2}(2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{1}{2}p_0V_0.$$

Осталось найти подведенное к газу количество теплоты Q_1. На участке *1–2* работа газа равна нулю, а давление растет при постоянном объеме, т.е. температура газа повышается. Значит, на этом участке газ получает тепло. На участке *2–3* работа газа A_{23} положительна, а объем растет при постоянном давлении, т.е. температура газа растет.

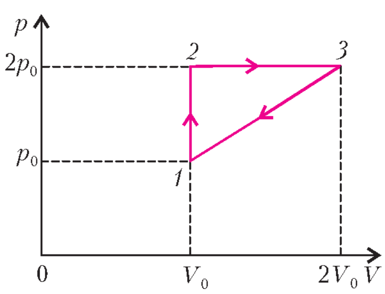


Рис. 1

Следовательно, на этом участке газ тоже получает тепло. А вот на участке *3–1* работа газа отрицательна (ибо газ сжимают), к тому же одновременно падают и давление и объем газа, что приводит к охлаждению газа. Иными словами, на участке *3–1* газ тепло не получает. Итак,

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = (U_2 - U_1) + A_{23} + (U_3 - U_2) = (U_3 - U_1) + A_{23}.$$

Учитывая, что

$$A_{23} = 2p_0(2V_0 - V_0) = 2p_0V_0,$$

получаем

$$Q_1 = \left(\frac{3}{2}\cdot 2p_0\cdot 2V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0\right) + 2p_0V_0 = \frac{13}{2}p_0V_0.$$

Теперь находим КПД цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{(1/2)p_0V_0}{(13/2)p_0V_0} = \frac{1}{13} \approx 7{,}7\%.$$

Задача 2. *На рисунке 2 изображен цикл дизельного двигателя, состоящий из адиабат 1–2 и 3–4, изобары 2–3 и изохоры 4–1. Температуры газа в точках 1, 2, 3, 4 равны* T_1, T_2, T_3, T_4 *соответственно. Найдите КПД цикла.*

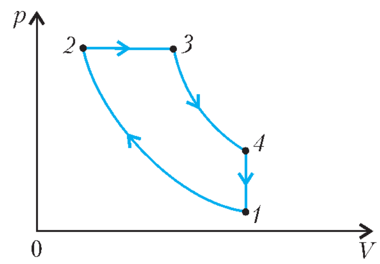


Рис. 2

Решение. Работу газа как «энергетическую площадь» цикла здесь вычислить нелегко – цикл криволинейный. Но в этом нет никакой нужды. Вычислим КПД через подведенное и отведенное количества теплоты Q_1 и Q_2. Естественно, на адиабатах тепло не подводится и не отводится. На изобаре *2–3* тепло подводится, ибо объем растет и, соответственно, растет температура. На изохоре *4–1* тепло отводится, так как давление и температура падают. Таким образом,

$$Q_1 = Q_{23} = (U_3 - U_2) + A_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + p_2(V_3 - V_2) = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + \nu R(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}\nu R(T_3 - T_2).$$

Аналогично,

$$Q_2 = U_4 - U_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_1).$$

Окончательно получаем

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{3(T_4 - T_1)}{5(T_3 - T_2)}.$$

Задача 3 (МИЭМ, 1990). *Определите КПД цикла, состоящего из двух адиабат и двух изохор (рис.3). Известно, что в процессе адиабатного расширения устанавливается температура* $T_2 = 0{,}75T_1$, *а в процессе адиабатного сжатия* $T_3 = 0{,}75T_4$.

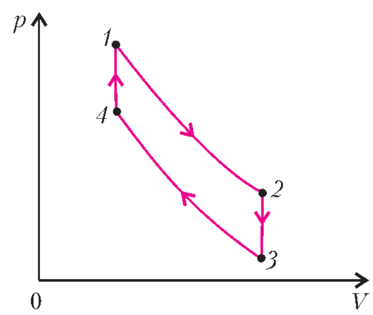


Рис. 3

Решение. На изохоре *4–1* тепло подводится, на изохоре *2–3* тепло отводится, на обеих адиабатах теплообмена нет. Кроме того, работа на изохорах не совершается. Поэтому

$$Q_1 = U_1 - U_4 , \quad Q_2 = U_2 - U_3 .$$

Значит,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{U_2 - U_3}{U_1 - U_4} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} .$$

С учетом условия задачи окончательно получаем

$$\eta = 1 - \frac{0,75T_1 - 0,75T_4}{T_1 - T_4} = 1 - 0,75 = 0,25 = 25\% .$$

Задача 4 (МФТИ, 1989). *КПД тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из изотермы 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1 (рис.4), равен* η. *Разность максимальной и минимальной температур газа в цикле составляет* ΔT. *Найдите работу, совершенную* ν *молями газа в изотермическом процессе.*

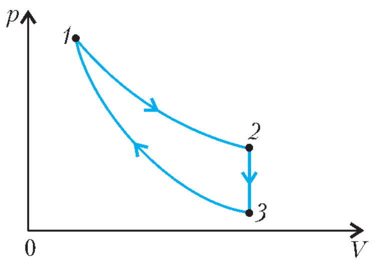


Рис. 4

Решение. Хотя в данной задаче КПД известен, выразим его, как и в предыдущих задачах, через количества теплоты Q_1 и Q_2 и искомую работу A_{12}.

Так как точки *1* и *2* лежат на одной изотерме, то $T_1 = T_2$ и, соответственно, $U_2 = U_1$. Ясно, что $\Delta T = T_2 - T_3$, ведь точка *3* лежит ниже точки *2*. Тогда

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} .$$

Тепло на изотерме действительно подводится, поскольку работа расширения газа A_{12} заведомо положительна. А на изохоре тепло отводится, причем

$$Q_2 = Q_{23} = U_2 - U_3 = \frac{3}{2}\nu R\left(T_2 - T_3\right) = \frac{3}{2}\nu R\Delta T .$$

Следовательно,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(3/2)\nu R\Delta T}{A_{12}} ,$$

откуда находим

$$A_{12} = \frac{1,5\nu R\Delta T}{1 - \eta} .$$

Задача 5 (МФТИ, 2005). *В цикле 1–3–4–1 (рис.5) КПД равен* η. *Чему равен КПД* η' *цикла 1–2–3–4–1?*

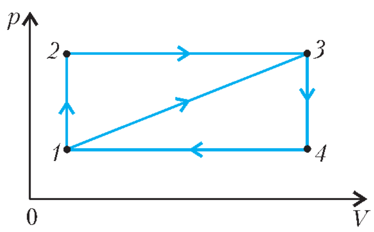


Рис. 5

Решение. Так как диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника, работа, совершенная во втором цикле *1–2–3–4–1*, вдвое больше работы A в первом цикле *1–3–4–1*.

В первом цикле тепло, очевидно, подводится только на участке *1–3*. При этом

$$Q_1 = Q_{13} = A_{13} + \left(U_3 - U_1\right) ,$$

где

$$A_{13} = A + p_1\left(V_4 - V_1\right) .$$

Значит,

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{A + p_1\left(V_4 - V_1\right) + \left(U_3 - U_1\right)} .$$

Во втором цикле тепло подводится только на участках *1–2* и *2–3*:

$$Q_1' = Q_{12} + Q_{23} = \left(U_2 - U_1\right) + \left(U_3 - U_2\right) + A_{23} = \left(U_3 - U_1\right) + A_{23} ,$$

где

$$A_{23} = 2A + p_1\left(V_4 - V_1\right) .$$

Следовательно,

$$\eta' = \frac{2A}{Q_1'} = \frac{2A}{2A + p_1\left(V_4 - V_1\right) + \left(U_3 - U_1\right)} .$$

Выразив величину $p_1\left(V_4 - V_1\right) + \left(U_3 + U_1\right)$ из уравнения для η, находим

$$\eta' = \frac{2\eta}{\eta + 1} .$$

Задача 6 (МИЭМ). *Определите КПД цикла (рис.6), совершаемого* $\nu = 3$ *моль газа и состоящего из изохоры, адиабаты и изобары, если известно, что газ получил* $Q_1 = 3000$ *Дж тепла и в результате адиабатного расширения температура его понизилась на* $\Delta T = 40$ *К.*

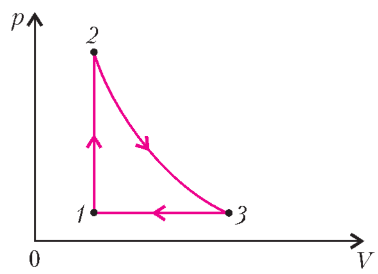


Рис. 6

Решение. Очевидно, что газ получает тепло на изохоре *1–2* и отдает его на изобаре *3–1*. Поэтому

$$Q_1 = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) ,$$

$$Q_2 = p_1\left(V_3 - V_1\right) + \left(U_3 - U_1\right) =$$

$$= p_3V_3 - p_1V_1 + \frac{3}{2}p_3V_3 - \frac{3}{2}p_1V_1 = \frac{5}{2}\left(p_3V_3 - p_1V_1\right) .$$

Запишем уравнения состояния газа в точках *2* и *3*:

$$p_2V_2 = \nu RT_2 , \quad p_3V_3 = \nu RT_3 .$$

Отсюда вытекает, что

$$p_2V_2 - p_3V_3 = \nu R\left(T_2 - T_3\right) = \nu R\Delta T .$$

По определению термодинамического коэффициента полезного действия,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} .$$

Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \eta = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}, \\ Q_1 = \dfrac{3}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right), \\ Q_2 = \dfrac{5}{2}\left(p_3V_3 - p_1V_1\right), \\ p_2V_2 - p_3V_3 = \nu R\Delta T. \end{cases}$$

Последовательно исключив из этой системы p_3V_3, $p_2V_2 - p_1V_1$ и Q_2, приходим к ответу

$$\eta = \frac{5\nu R\Delta T}{2Q_1} - \frac{2}{3} = 0,16 = 16\% .$$

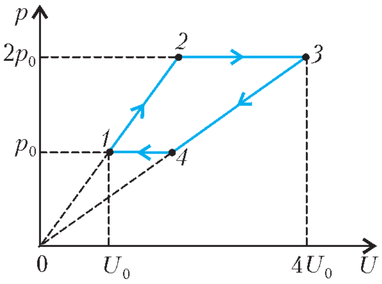


Рис. 7

Задача 7 (МИЭМ, 1991). *Газ совершает цикл, изображенный на рисунке 7 в координатах p и U, где p – давление, U – внутренняя энергия газа. Определите КПД цикла.*

Решение. Прежде всего представим цикл в координатах p, V. Запишем внутренние энергии газа в вершинах трапеции *1* и *3*:

$$U_0 = \frac{3}{2}p_0V_1\,,\ 4U_0 = \frac{3}{2}\cdot 2p_0V_3\,.$$

Отсюда находим

$$V_1 = \frac{2U_0}{3p_0}\,,\ V_3 = \frac{4U_0}{3p_0}\,.$$

Видим, что $V_3 = 2V_1$. Участки цикла *1–2* и *3–4* – изохоры. Действительно, запишем уравнение прямой *1–2* в виде $p = \alpha U$, где α – коэффициент пропорциональности, или $p = \alpha\cdot\frac{3}{2}pV$, откуда получаем $V = \frac{2}{3\alpha} = \text{const}$. Аналогичный вывод справедлив и для участка *3–4*. Следовательно, $V_2 = V_1$ и $V_4 = V_3$. Тогда цикл в координатах p, V представляет собой уже встречавшийся нам в пятой задаче прямоугольник (рис.8).

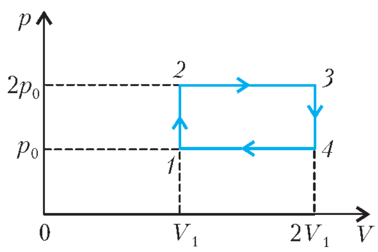


Рис. 8

Теперь приступим к расчетам. Работа цикла равна

$$A = p_0V_1\,.$$

Тепло подводится к газу на участках *1–2* и *2–3*, поэтому

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + A_{23} =$$

$$= (U_3 - U_1) + 2p_0V_1 = \frac{3}{2}\cdot 2p_0\cdot 2V_1 - \frac{3}{2}p_0V_1 + 2p_0V_1 = \frac{13}{2}p_0V_1\,.$$

Значит,

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{p_0V_1}{(13/2)p_0V_1} = \frac{2}{13} \approx 15{,}4\%\,.$$

Задача 8 (МФТИ). *КПД цикла 1–2–4–1 равен* η_1, *а цикла 2–3–4–2 равен* η_2. *Участки 4–1 и 2–3 – изохоры, участок 3–4 – изобара, участки 1–2 и 2–4 представляют собой линейную зависимость давления от объема (рис.9). Все циклы обходятся по часовой стрелке. Найдите КПД* η *цикла 1–2–3–4–1.*

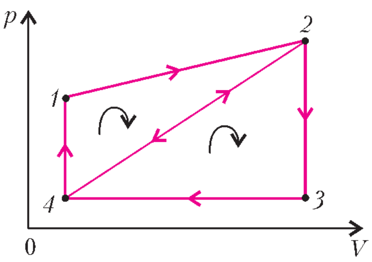


Рис. 9

Решение. В цикле *1–2–4–1* тепло подводится на участках *1–2* и *4–1*, а отводится на участке *2–4*. Значит,

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{41}\,,\ Q_2 = Q_{24}\,,$$

и

$$\eta_1 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_{24}}{Q_{12} + Q_{41}}\,.$$

В цикле *2–3–4–2* тепло подводится на участке *4–2*, а отводится на участках *2–3* и *3–4*. Следовательно,

$$\eta_2 = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{24}}\,.$$

В цикле *1–2–3–4–1* тепло подводится на участках *1–2* и *4–1*, а отводится на участках *2–3* и *3–4*. Поэтому

$$\eta = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{41} + Q_{12}}\,.$$

Из формул для η_1 и η_2 найдем

$$\frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{41} + Q_{12}} = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2)$$

и окончательно получим

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2\,.$$

Задача 9 (МГУ, физфак, 2000). *На pV-диаграмме, изображенной на рисунке 10, показано изменение состояния газа, используемого в качестве рабочего вещества теплового двигателя. Отношение максимальной абсолютной температуры газа к его минимальной температуре в данном цикле равно 4. Во сколько раз отличается КПД* η *этого цикла от максимально возможного?*

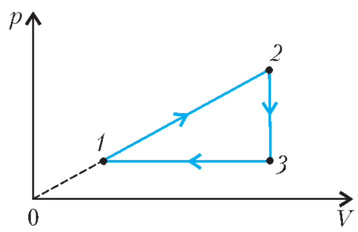


Рис. 10

Решение. Произведение pV достигает наибольшего значения в точке *2*, а наименьшего – в точке *1*. В силу уравнения Клапейрона–Менделеева, максимальная температура газа будет в точке *2*, а минимальная – в точке *1*, т.е.

$$T_2 = 4T_1\,.$$

Запишем уравнения состояния для вершин цикла:

$$p_1V_1 = \nu RT_1\,,\ p_2V_2 = \nu RT_2\,,\ p_3V_3 = \nu RT_3\,.$$

Учтем, что точки *1* и *2* лежат на прямой, проходящей через начало координат:

$$p_1 = \alpha V_1\,,\ p_2 = \alpha V_2\,,\ \text{и}\ p_2V_1 = p_1V_2\,.$$

Из всех полученных уравнений легко найдем, что

$$p_2 = 2p_1\ \text{и}\ T_3 = 2T_1\,.$$

Известно, что КПД любой тепловой машины, работающей в некотором интервале температур, не может быть больше КПД машины, работающей по циклу Карно в том же интервале температур. В нашем случае

$$\eta_{max} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{3}{4}\,.$$

Найдем теперь КПД данного цикла η. Работа газа за цикл равна

$$A = \frac{1}{2}(V_3 - V_1)(p_2 - p_3) = \frac{1}{2}(V_3p_2 - V_3p_3 - V_1p_2 + V_1p_3) =$$

$$= \frac{1}{2}(\nu RT_2 - \nu RT_3 - \nu RT_1) = \frac{\nu RT_1}{2}\,.$$

Очевидно, что к газу подводится тепло только на участке *1–2*, поэтому

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} + (U_2 - U_1) =$$

$$= (A + p_1(V_3 - V_1)) + \left(\frac{3}{2}\nu RT_2 - \frac{3}{2}\nu RT_1\right) = 6\nu RT_1\,.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{0,5\nu RT_1}{6\nu RT_1} = \frac{1}{12}\text{ , и }\frac{\eta_{max}}{\eta} = \frac{3/4}{1/12} = 9 .$$

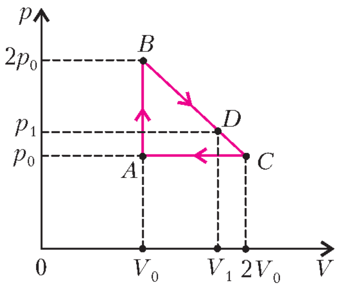


Рис. 11

Задача 10 («Задачник «Кванта», Ф820). *Определите КПД цикла ABCA, изображенного на рисунке 11.*

Решение. Эта задача может показаться весьма похожей на первую, ибо треугольный цикл в обеих задачах один и тот же, только расположенный по-разному. Но это сходство кажущееся, так как эта задача существенно труднее первой.

Работа газа за цикл определяется сразу:

$$A = \frac{1}{2} p_0 V_0 .$$

А для нахождения подведенного количества теплоты Q_1 придется немало потрудиться. На участке AB тепло безусловно подводится, и

$$Q_{AB} = U_B - U_A = \frac{3}{2}\cdot 2p_0V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}p_0V_0 .$$

На участке BC давление все время падает, объем все время растет, а вот температура изменяется более сложно – сначала она до некоторой точки D растет, а потом падает, возвращаясь в точке C к первоначальному значению (в точке B). Это означает, что тепло подводится к газу не на всем участке BC, а только на этапе BD. Найдем Q_{BD}.

Запишем первый закон термодинамики для малого количества теплоты:

$$\Delta Q = \Delta U + p\Delta V = \Delta\left(\frac{3}{2}pV\right) + p\Delta V = \frac{5}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p$$

(мы использовали равенство $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p$). Приравнивая ΔQ к нулю, получим

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{5}{3}\frac{p}{V} .$$

Из графика найдем

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{p_0}{V_0}\text{ , т.е. }\frac{p_0}{V_0} = \frac{5}{3}\frac{p}{V} .$$

Уравнение прямой BC легко пишется по двум известным точкам:

$$p = -\frac{p_0}{V_0}V + 3p_0 .$$

Таким образом, для координат точки D получаем

$$p_1 = \frac{9}{8}p_0 ,\quad V_1 = \frac{15}{8}V_0$$

(видно, что p_1V_1 лежит между соответствующими произведениями для точек B и C) и находим

$$Q_{BD} = (U_D - U_B) + \frac{1}{2}(2p_0 + p_1)(V_1 - V_0) =$$

$$= \frac{3}{2}p_1V_1 - \frac{3}{2}\cdot 2p_0V_0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{25}{8}p_0V_0 = \frac{49}{32}p_0V_0 .$$

Следовательно,

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BD} = \frac{3}{2}p_0V_0 + \frac{49}{32}p_0V_0 = \frac{97}{32}p_0V_0 ,$$

и

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{(1/2)p_0V_0}{(97/32)p_0V_0} = \frac{16}{97} \approx 16,5\% .$$

Упражнения

1. На рисунке 12 представлен цикл турбореактивного двигателя, состоящий из двух изобар и двух адиабат. По известным температурам T_1, T_2, T_3, T_4 найдите КПД цикла.

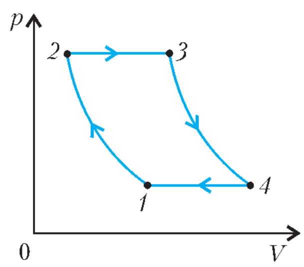


Рис. 12

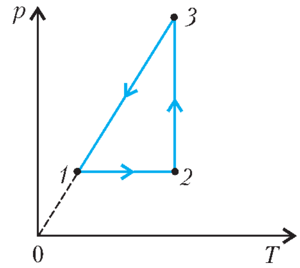


Рис. 13

2 (МИЭТ). Определите КПД цикла, изображенного на рисунке 13, если известно, что в начальном состоянии *1* температура газа $T_1 = 300$ К, отношение объемов газа в состояниях *3* и *2* равно 2 и при изотермическом расширении газ совершает работу $A = 5$ кДж. Количество вещества газа $\nu = 1$ моль.

3 (МАИ, 2003). Коэффициент полезного действия цикла *1–2–3–1* (рис.14) равен $\eta = 15\%$. Найдите КПД цикла *3–5–4–3*.

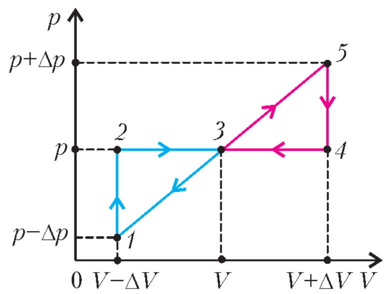


Рис. 14

4 (МГУ, физфак, 1995). Давление газа меняют от величины p_1 до величины p_2 в соответствии с pV-диаграммой, имеющей вид треугольника, показанного на рисунке 15. Найдите КПД цикла, если температура газа в состоянии *3* больше его температуры в состоянии *1*.

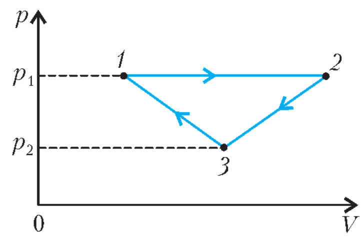


Рис. 15

5 (МАИ, 2003). Цикл состоит из изохоры *1–2*, изобары *2–3* и прямой *3–1* (рис.16). Температуры в точках *1*, *2* и *3* связаны соотношениями $T_2 = 1,5T_1$ и $T_3 = 3T_1$. Определите КПД цикла.

6 (МФТИ). Цикл *1–2–3–1* состоит из прямолинейного участка *1–2*, адиабаты *2–3* и изотермы *3–1* (рис.17). Его КПД равен η_1. Цикл *1–3–4–1* состоит из изотермы *1–3*, изобары *3–4* и адиабаты *4–1*. Его КПД равен η_2. Определите КПД цикла *1–2–3–4–1*. Все циклы обходятся по часовой стрелке.

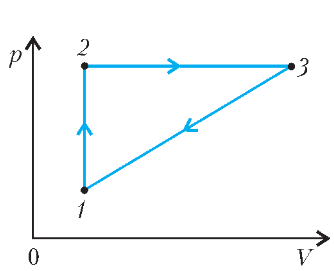


Рис. 16

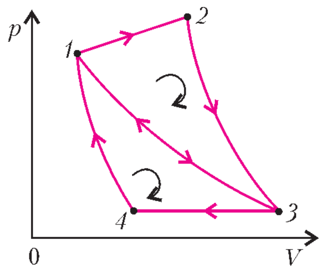


Рис. 17

ОЛИМПИАДЫ

Региональный этап XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Как и в прошлом году, региональный этап Всероссийской олимпиады школьников 2010-11 учебного года проводился одновременно во всех регионах России по единым заданиям и являлся отборочным для участия в заключительном этапе Всероссийской олимпиады. По традиции, в каждом из двух туров (дней) задачи располагаются в порядке возрастания сложности (по мнению составителей). И если первые задачи каждого тура были доступными для многих участников олимпиады, то трудность задач 4 и 8 в каждой параллели оказалась на уровне задач заключительного этапа.

ЗАДАЧИ

9 класс

Первый день

1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

Л.Емельянов

2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC. Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

Р.Женодаров

3. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь черных частей равна общей площади белых частей.

Д.Храмцов

4. Даны положительные числа x, y, z. Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \le \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

А.Храбров, Б.Трушин

Второй день

5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+4)$ будет целым.

О.Подлипский

6. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек – обозначим их A, B и C, после чего на плоскости отмечалась точка D, симметричная A относительно серединного перпендикуляра к BC. Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходные точки также лежали на одной прямой.

В.Шмаров

7. См. задачу М2215,*а* «Задачника «Кванта».

8. См. задачу М2218 «Задачника «Кванта» для $M = 100$.

10 класс

Первый день

1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша – три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй.

И.Рубанов

2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и K так, что $\angle ABM = \angle CBK$. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников ABM, ABK, CBM и CBK, лежат на одной окружности.

Т.Емельянова

3. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_l$, где $1 \le k$, $l \le 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (т.е. найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, … …, 99)?

П.Кожевников

4. Ненулевые числа a, b, c таковы, что любые два из трех уравнений $ax^{11} + bx^4 + c = 0$, $bx^{11} + cx^4 + a = 0$, $cx^{11} + ax^4 + b = 0$ имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.

И.Богданов

Второй день

5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым.

О.Подлипский

6. См. задачу М2214 «Задачника «Кванта» для $N = 2011$.

7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C_0 и B_0 – середины сторон AB и AC соответственно, O – центр описанной окружности, H – точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 – в точке Q. Оказалось, что четырехугольник $OPHQ$ – ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

Л.Емельянов

8. См. задачу М2218 «Задачника «Кванта» для $M = 100$.

11 класс

Первый день

1. Существует ли такое вещественное α, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ рациональны?

В.Сендеров

2. Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.

Н.Агаханов, И.Богданов

3. На окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, выбрана точка K. Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в точке M такой, что $AM : MD = 2$. Пусть O – центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на окружности, описанной около треугольника COD.

В.Шмаров

4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1,\ldots,x_{2011}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1,\ldots,y_{2011}$ кг цемента соответственно, причем

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

Р.Карасёв

Второй день

5. См. задачу 5 для 10 класса.

6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$.

П.Кожевников

7. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провел всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведенные прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася?

Н.Агаханов

8. Даны положительные числа b и c. Докажите неравенство

$$(b-c)^{2011}(b+c)^{2011}(c-b)^{2011} \geq$$
$$\geq \left(b^{2011}-c^{2011}\right)\left(b^{2011}+c^{2011}\right)\left(c^{2011}-b^{2011}\right).$$

В.Сендеров

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин

Региональный этап XLV Всероссийской олимпиады школьников по физике

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

Задача 1. Про тазики. Для стирки белья в квадратном душевом поддоне со стороной $a = 80$ см и высотой бортика $h = 20$ см хозяйка использует находящийся в поддоне частично заполненный водой квадратный тазик со стороной $b = a/2 = 40$ см и глубиной h, а для полоскания белья – круглый цилиндрический тазик радиусом $R = a/4 = 20$ см и глубиной h, полностью заполненный водой (рис.1). Какой высоты H будет уровень воды в поддоне, если хозяйка выльет в него всю воду из круглого тазика и круглый тазик уберет? Сливное отверстие поддона закрыто пробкой. Квадратный тазик остается в поддоне и не всплывает.

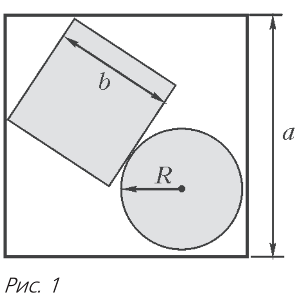


Рис. 1

Примечание. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где $\pi = 3{,}14$.

Фольклор

Задача 2. Забег Глюка и Бага. Экспериментатор Глюк и теоретик Баг решили соревноваться в беге. Известно, что Глюк пробегает $s_1 = 125$ м, а Баг $s_2 = 100$ м за одно и то же время t. Так как Глюк бегает быстрее Бага, он решил дать ему фору (преимущество) в $s = 300$ м.

1) На каком расстоянии L от места своего старта Глюк догонит Бага?

2) Во время забега выяснилось, что расстояние $s_0 = 1000$ м Глюк пробегает быстрее Бага на $\Delta t = 50$ с. Определите скорости бега Глюка и Бага.

И.Бажанский

Задача 3. Два кубика. Имеются два кубика. Один изготовлен из железа плотностью $\rho = 7{,}8$ г/см^3, а другой изготовлен из неизвестного вещества – сплава Х. Масса кубика из сплава Х в $k = 1{,}67$ раза меньше массы железного кубика, а длина его ребра на 20% больше длины ребра железного кубика. Определите плотность неизвестного вещества.

И.Бажанский

Задача 4. Уборка снега. По дороге на снегосборный пункт с постоянной скоростью v_1 [м/с] едет самосвал, груженый снегом. В кузове самосвала имеется дырка, через которую постоянно высыпается снег, причем за одинаковые промежутки времени высыпается одинаковая масса снега μ [кг/с]. Вдогонку за самосвалом отправляется снегоуборочный комбайн с бункером. Он едет со скоростью v_2 [м/с] и собирает весь просыпавшийся снег.

1) Определите линейную плотность просыпавшегося снега λ [кг/м], т.е. сколько килограммов снега приходится на каждый метр длины дороги.

2) Пусть при данных величинах бункер комбайна заполняется за время τ. За какое время t заполнится бункер в 2 раза большего объема, если комбайн поедет в 2 раза быстрее, самосвал поедет в 2 раза медленнее, а снег из кузова будет сыпаться в 2 раза быстрее (с расходом 2μ)?

Считайте что изначально бункер пустой, его объем меньше объема снега в самосвале и за время заполнения бункера комбайн не догоняет самосвал.

М.Замятнин

8 класс

Задача 1. Про тазики. Для стирки белья в квадратном душевом поддоне со стороной a = 80 см и высотой бортика h = 20 см хозяйка использует находящийся в поддоне частично заполненный водой квадратный тазик со стороной $b = a/2$ = 40 см, глубиной h и общей массой m = 5 кг, а для полоскания белья – круглый цилиндрический тазик радиусом $R = a/4$ = 20 см и глубиной h (см. рис.1). Каким может быть уровень воды H в круглом тазике, если при ее выливании в поддон квадратный тазик не всплывает? После выливания воды круглый тазик убирают из поддона. Сливное отверстие поддона закрыто пробкой.

Примечание. Площадь круга S вычисляется но формуле $S = \pi R^2$, где π = 3,14. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

С.Кармазин

Задача 2. Изогнутая проволока. Однородную проволоку длиной L = 1,5 м и постоянного сечения согнули буквой Z так, что в местах сгиба участки проволоки образовали прямые углы, а длины прямолинейных участков проволоки поделились в отношении $a : b : c$ = = 1 : 10 : 4. Проволоку подвесили на нити в точке O (рис.2). Определите расстояние l от точки подвеса O до места сопряжения участков a и b проволоки, если участок b горизонтален.

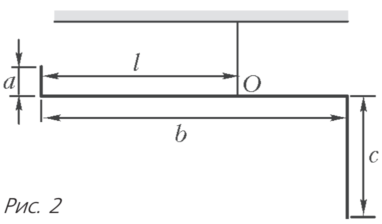


Рис. 2

И.Бажанский

Задача 3. Плавление льда. В теплоизолированном сосуде с ничтожно малой теплоемкостью находится кусок льда при температуре 0 °С. В сосуд впустили тонкой струйкой такое количество пара при температуре 100 °С, что при его конденсации выделившегося количества теплоты в точности хватило на плавление льда. Какая температура t установилась в сосуде после того, как система пришла в термодинамическое равновесие? Известно, что удельная теплота плавления льда λ = 340 кДж/кг, а удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3 \cdot 10^3$ кДж/кг.

Фольклор

Задача 4. Уборка снега. После снегопада на снегоприемный пункт по заснеженной дороге с постоянной скоростью v_1 [м/с] едет самосвал, груженый снегом. В кузове самосвала имеется дырка, через которую на дорогу ровной струйкой сыпется снег, причем за одинаковые промежутки времени высыпается одинаковая масса μ [кг/с]. Следом за самосвалом едет снегоуборочный комбайн с бункером. Он едет с постоянной скоростью и собирает снег по всей ширине дороги до тех пор, пока бункер не заполнится. Выяснилось, что если бы скорость самосвала возросла в 3 раза при неизменной скорости комбайна, то время заполнения бункера увеличилось бы в 2 раза. Выразите через v_1 и μ линейную плотность снега λ [кг/м] на заснеженной дороге, т.е. сколько килограммов снега приходилось на каждый метр длины дороги, до того как по ней проехал самосвал. Считайте, что изначально бункер пустой, его объем меньше объема снега в самосвале и за время заполнения бункера комбайн не догоняет самосвал.

М.Замятнин

9 класс

Задача 1. В прачечной. Для стирки белья в квадратном душевом поддоне со стороной a = 80 см и высотой бортика h = 20 см хозяйка использует находящийся в поддоне частично заполненный водой и бельем квадратный тазик со стороной $b = a/2$, высотой бортика h и общей массой m = 2,4 кг. Для полоскания белья хозяйка использует находящийся в том же поддоне круглый цилиндрический тазик, полностью заполненный водой. Радиус дна тазика $R = a/4$ и высота его бортика h (см. рис.1). Каким будет уровень H воды в поддоне, если вылить в него всю воду из круглого тазика? После выливания воды круглый тазик убирают из поддона. Сливное отверстие поддона закрыто пробкой.

Примечание. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где $\pi = 3{,}14$.

С.Кармазин

Задача 2. Испорченный кран. В большой комнате с температурой воздуха $t_0 = 20$ °С находится испорченный кран. Из него тоненькой струйкой в единицу времени вытекает μ = 0,1 г/с воды. Вода попадает в тонкостенную металлическую раковину с квадратным сечением $a^2 = 30$ см $\times$ 30 см. Температура воды в кране $t_1 = 54$ °С. Слив раковины прикрыт так, что вода из него частично вытекает. При этом уровень воды в раковине устанавливается на высоте H = 10 см, равной глубине раковины. Пренебрегая теплоемкостью раковины и считая, что она очень хорошо проводит тепло, определите установившуюся температуру t воды в раковине. Считайте, что поток тепла от воды в раковине равен $q = kS(t - t_0)$, где $k = 0{,}3$ Вт/(м$^2 \cdot$ °С), а S – площадь поверхности воды, включая стенки и дно раковины. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ °С). Вода в раковине перемешивается.

Н.Кудряшова

Задача 3. Мелкокалиберная винтовка. Мелкокалиберную винтовку закрепили на стенде так, что ее ствол оказался горизонтальным (рис.3). После этого из винтовки начали

Рис. 3

стрелять в мишень, находящуюся от нее на расстоянии L = = 50 м. Из-за небольшого разброса Δv скоростей пуль они попадают в мишень на разной высоте (рис.4), причем максимальное отклонение высоты их попадания в мишень от ее среднего значения составляет Δh = 17 мм. Определите максимальное отклонение Δv скорости нули от ее среднего значения v_0 = 350 м/с. Ускорение свободного падения

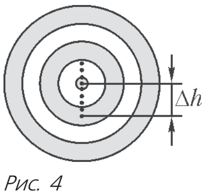


Рис. 4

$g = 10$ м/с^2. Изменение скорости нули из-за сопротивления воздуха не учитывать.

В.Слободянин

Задача 4. Очень скользкая дорога. Девятиклассник стоит на границе газона и обледеневшего участка дороги шириной L. Трение между обувью мальчика и дорогой практически отсутствует. Он решил сначала отбежать назад, а затем, разогнавшись, преодолеть скользкий участок по инерции. Коэффициент трения между обувью и газоном μ. Ускорение свободного падения g.

1) Какое наименьшее время T_1 потребуется мальчику, чтобы отбежать от дороги и вновь вернуться к границе обледеневшего участка, разогнавшись до скорости v_0?

2) Какое наименьшее время T_2 от момента начала движения понадобится ему для преодоления всего скользкого участка?

И.Воробьев

Задача 5. Амперметры и вольтметры. У экспериментатора Глюка и теоретика Бага было 5 идеальных амперметров и 5 идеальных вольтметров. Они соединили последовательно амперметры и вольтметры, а затем подключили к ним резисторы сопротивлениями $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $R_4 = 4$ кОм, $R_5 = 5$ кОм, $R_6 = 6$ кОм. В результате получились электрические цепи, изображенные на рисунках 5 и 6, которые подключили к источнику постоянного напряжения $U_0 = 12$ В.

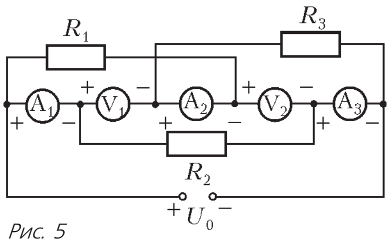


Рис. 5

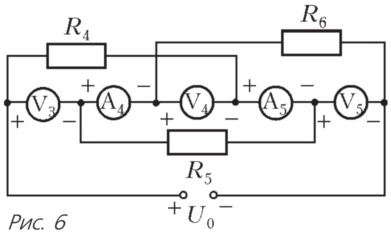


Рис. 6

1) Определите показания вольтметров V_1, V_2 и амперметров A_1, A_2, A_3 в схеме Глюка. В какую сторону отклонятся стрелки приборов, если при подключении их клемм, помеченных символом (+) к положительному выводу батареи, а клемм, помеченных символом (−), к отрицательному выводу батареи, стрелка отклоняется вправо (рис.7)?

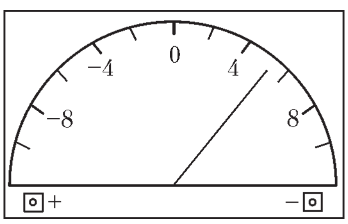


Рис. 7

2) Определите показания вольтметров V_3, V_4, V_5 и амперметров A_4 и A_5 в схеме Бага. В какую сторону отклонятся стрелки приборов в этом случае?

Фольклор

10 класс

Задача 1. Про тазики. Для стирки белья в квадратном душевом поддоне со стороной $a = 80$ см и высотой бортика $h = 20$ см хозяйка использует находящийся в поддоне частично заполненный водой и бельем квадратный тазик со стороной $a/2$, высотой бортика h и общей массой $m = 16$ кг (рис.8). Для полоскания белья хозяйка использует находящийся в том же поддоне круглый цилиндрический тазик с радиусом дна R и высотой бортика h. Чему равен максимально возможный радиус $R_м$ круглого тазика, полностью заполненного водой, если при выливании воды из него в поддон квадратный тазик не всплывает? Сливное отверстие поддона закрыто пробкой.

Примечание. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где $\pi = 3{,}14$.

С.Кармазин

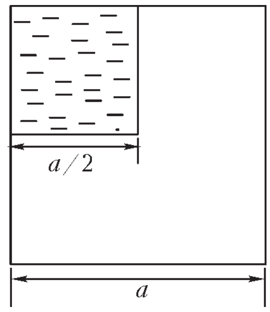


Рис. 8

Задача 2. Блоки и веревка. Металлический куб прикреплен в точке A к тяжелой однородной веревке, перекинутой через два легких блока; другой конец веревки закреплен на неподвижной опоре в точке B так, что точки A и B находятся на одной и той же высоте (рис.9). Силы $F_1 = 110$ Н и $F_2 = 90$ Н, приложенные к осям блоков, удерживают систему в равновесии. Определите длину веревки L. Линейная плотность веревки (масса единицы длины) $\rho = 0{,}25$ кг/м, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Трения в осях блоков нет. Радиусом блоков по сравнению с длиной веревки пренебречь нельзя.

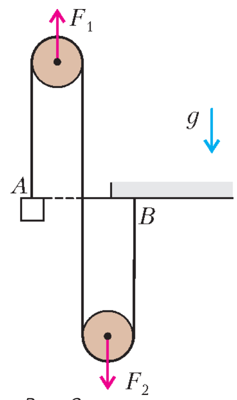


Рис. 9

Фольклор

Задача 3. Брусочки. Система, состоящая из двух одинаковых брусков массой m каждый, движется с постоянной скоростью v_0 вдоль гладкой горизонтальной плоскости по направлению к вертикальной стенке (рис. 10). Верхний брусок смещен относительно нижнего на расстояние b_0 в направлении движения. Через некоторое время система сталкивается со стенкой. Соударение любого из брусков с ней можно считать абсолютно упругим. Коэффициент трения между брусками μ.

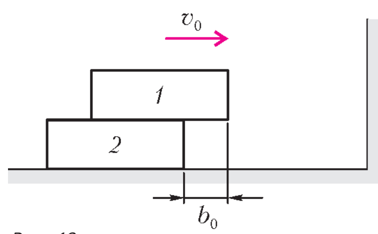


Рис. 10

1) Определите смещение b (модуль и направление) верхнего бруска относительно нижнего после того, как прекратится взаимодействие системы брусков со стенкой, а верхний брусок перестанет скользить по нижнему.

2) С какой скоростью $v_к$ после этого будет двигаться система?

3) В каких координатах зависимость $b(v_0)$ будет линейной? Постройте график этой зависимости в соответствующих координатах.

Д.Антоненко

Задача 4. Потерянные оси. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли рукопись, на которой был изображен процесс $1 \to 2 \to 3$ (рис. 11), совершенный над одним молем гелия. От времени чернила выцвели, и стало невозможно разглядеть, где находятся оси p (давле-

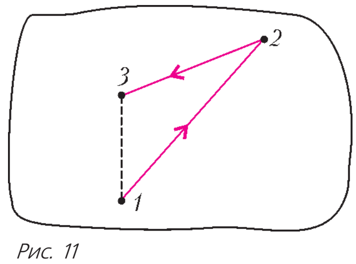


Рис. 11

ние) и V (объем). Однако из текста следовало, что состояния *1* и *3* лежат на одной изохоре, соответствующей объему V_1. Кроме того, было сказано, что количество теплоты, подведенное к газу в процессе $1 \to 2 \to 3$, равно нулю. Определите объем V_2.

В.Слободянин

Задача 5. Мостик. Четыре резистора сопротивлениями $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 7$ Ом и $R_4 = 6$ Ом соединены с батареей, напряжение на которой $U_{01} = 9{,}1$ В, а ее внутренним сопротивлением можно пренебречь (рис.12).

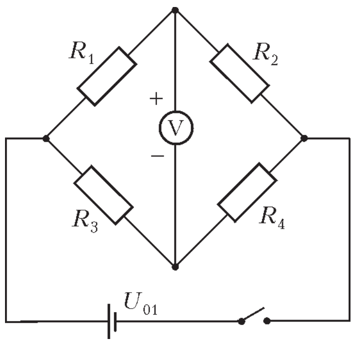


Рис. 12

1) Между резисторами включен идеальный вольтметр. Найдите его показания. В какую сторону отклонится стрелка вольтметра? Известно, что при подключении клеммы вольтметра, помеченной символом (+), к положительному выводу батареи, а клеммы вольтметра, помеченной символом (−), к отрицательному выводу батареи, стрелка отклоняется вправо (рис.13).

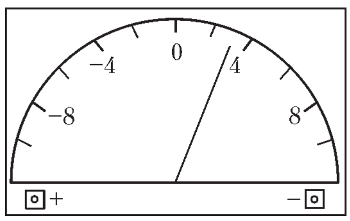


Рис. 13

2) Через какое-то время батарея частично разрядилась, и напряжение на ее выводах уменьшилось до $U_{02} = 9{,}0$ В. Вместо вольтметра в цепь включили амперметр (рис.14), сопротивление которого пренебрежимо мало. Найдите показания амперметра. В какую сторону отклонится стрелка амперметра, если при протекании через него тока от клеммы, помеченной символом (+), к клемме, помеченной символом (−), стрелка отклоняется вправо?

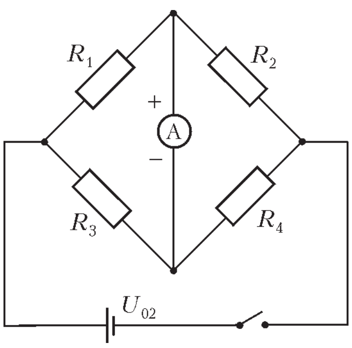


Рис. 14

Фольклор

11 класс

Задача 1. Стержень и вода. Тонкий стержень постоянного сечения состоит из двух частей. Первая из них имеет длину $l_1 = 10$ см и плотность $\rho_1 = 1{,}5$ г/см^3, вторая имеет плотность $\rho_2 = 0{,}5$ г/см^3. При какой длине l_2 второй части стержня он будет плавать в воде (плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3) в вертикальном положении (рис.15)?

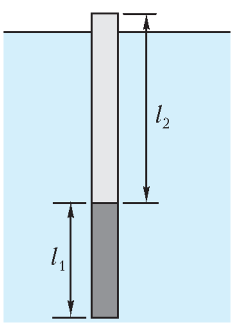


Рис. 15

О.Шведов

Задача 2. Грузы и блоки. На гладкой горизонтальной поверхности покоится уголок массой M, который с помощью легкой нити и двух блоков соединен со стенкой и бруском массой m (рис.16). Брусок касается внутренней поверхности уголка. Участки нити, перекинутые через блок, прикрепленный к стене, натянуты горизонтально. Вначале систему удерживают в состоянии покоя, а затем отпускают. Найдите ускорение a уголка. Блоки легкие. Трение в системе отсутствует.

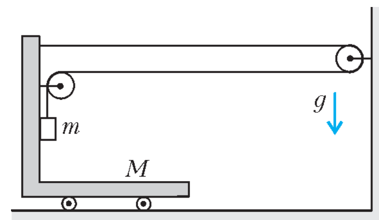


Рис. 16

Д.Александров

Задача 3. Потерянные оси. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли рукопись, на которой был изображен процесс $1 \to 2 \to 3$, совершенный над одним молем азота (см. рис.11). От времени чернила выцвели, и стало невозможно разглядеть, где находятся оси p (давление) и V (объем). Однако из текста следовало, что состояния *1* и *3* лежат на одной изохоре, а также то, что в процессах $1 \to 2$ и $2 \to 3$ объем газа изменяется на ΔV. Кроме того, было сказано, что количество теплоты, подведенное в процессе $1 \to 2 \to 3$ к азоту, равно нулю. Определите, на каком расстоянии (в единицах объема) от оси p находится изохора, проходящая через точки *1* и *3*.

В.Слободянин

Задача 4. Переменный резистор. В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке 17, ЭДС батареек равны $3\mathscr{E}$ и $2\mathscr{E}$, а сопротивления резисторов составляют $R_1 = R$, $R_2 = 2R$ и $R_x = 3R$. На сколько процентов изменится сила тока, проходящего через амперметр, если сопротивление переменного резистора R_x увеличить на 5%?

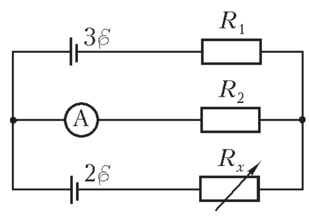


Рис. 17

Фольклор

Задача 5. Диод в колебательном контуре. Электрическая цепь состоит из идеального источника тока с ЭДС $\mathscr{E}$, двух конденсаторов емкостями C и $2C$, катушки индуктивностью L, резисторов сопротивлениями R и r, идеального диода D и двух ключей K_1 и K_2 (рис.18). В начальный момент времени конденсаторы не заряжены, а ключи разомкнуты.

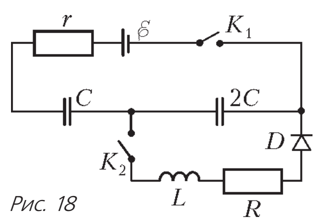


Рис. 18

1) Сначала замыкают ключ K_1. Найдите напряжение U_{2C}, установившееся на конденсаторе емкостью $2C$, и работу A, совершенную источником тока.

2) После того как конденсаторы зарядятся, ключ K_1 размыкают, а ключ K_2 замыкают. Затухание в получившемся RLC-контуре мало, т.е. количество теплоты, которое выделяется на резисторе сопротивлением R за полпериода колебаний, намного меньше начальной энергии, запасенной в конденсаторе емкостью $2C$. Найдите зависимость силы тока $I = I(t)$ от времени. Постройте соответствующий график. Определите количество теплоты Q_R, которое выделится на резисторе сопротивлением R. Вычислите установившееся напряжение $U_д$ на диоде.

М.Осин

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

Всероссийская студенческая олимпиада по физике 2010 года

15 ноября 2010 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошел заключительный тур очередной Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов.

По результатам олимпиады, в командном зачете первое место заняла команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПГПУ), набравшая 142 балла, второе место заняла команда Национального исследовательского института «МИСИС» (74 балла), третье место – команда МГТУ им. Н.Э.Баумана (68 баллов).

В личном зачете первое место завоевал Ярослав Бельтюков (СПГПУ), второе место завоевал Антон Пахомов (Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П.Королева), третье место – Петр Кравчук (СПГПУ).

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Ракета догоняет цель, двигаясь все время со скоростью v_1 по соединяющей их линии. Цель, двигаясь со скоростью v_2, уходит от ракеты, сохраняя угол между векторами скоростей равным α. Определите перемещение ракеты до точки встречи, если начальное расстояние между ними было равно L.

2. Два одинаковых тела связаны нерастяжимой нитью длиной L и лежат на горизонтальной поверхности. Первое тело бросили под углом к горизонту таким образом, что в момент неупругого натяжения нити его скорость была направлена под углом α к горизонту и равна v, а нить находилась в вертикальном положении. В процессе дальнейшего движения второе тело достигло максимальной высоты за время τ. Определите эту максимальную высоту.

3. Шкаф стоит на четырех ножках. Под каждую ножку по очереди подкладывают пьезометрический датчик и измеряют силы давления F_1, F_2, F_3, F_4 каждой ножки на датчик. Определите вес шкафа, считая, что контакт ножки с полом точечный, при каждом измерении одна из ножек отрывается от пола и наклоном шкафа можно пренебречь.

4. Точечное тело массой m скользит по гладкой плоскости, удерживаемое нерастяжимой нитью, продетой через маленькое отверстие в плоскости. Нить может свободно скользить внутри отверстия, сила натяжения нити постоянна и равна T. Определите тангенциальное ускорение тела, если к нему приложена тангенциальная сила $F \ll T$.

5. Первое тело имеет температуру $2T_0$ и теплоемкость C, второе – температуру T_0 и теплоемкость $2C$. Определите, до какой максимальной температуры можно нагреть второе тело с использованием идеальной тепловой машины, если суммарная работа равна нулю. Известно, что уравнение $x^3 - 2x + 1 = 0$ имеет корень $x = 0{,}62$.

6. Заряд q массой m движется в плоскости в поперечном магнитном поле, индукция которого B меняется обратно пропорционально расстоянию r от точки O, находящейся на плоскости: $B = D/r$. Определите скорость, с которой будет удаляться заряд от точки O при $r \gg r_0$, где r_0 – начальное значение r. В начальный момент времени скорость заряда тангенциальна и равна $v_0 = 2qD/m$.

7. Сплошной металлический шар радиусом R разделен по диаметральной плоскости, и половинки изолированы друг от друга тонким слоем диэлектрика. Определите емкость каждой половинки шара.

8. Сферическая оболочка из сверхпроводника радиусом R помещена в однородное магнитное поле с индукцией B. Определите дипольный момент оболочки и максимальную линейную плотность тока.

9. На пути плоской световой волны интенсивностью I_0 стоит экран в виде кольца, площадь которого равна площади первой зоны Френеля. Определите максимальное значение интенсивности волны в точке наблюдения при расширении кольца.

Публикацию подготовили В.Голубев, В.Глушков

По воде и посуху

(Начало см. на с. 35)

– со скоростью 1 циферблат в час. Значит, сближаются они со скоростью 1 – 1/12 = 11/12 циферблата в час.

– Это почему?

– Ну вот, стрелки встретились, и тут минутная стрелка как бы снова часовую догоняет. Но и часовая на месте не стоит. Значит, скорость, с которой минутная стрелка догоняет часовую – это разность их скоростей.

– Вроде понятно, а дальше?

– Слушай, а давай, как на сегодняшнем занятии, в другую систему отсчета перейдем. Будем считать, что часовая стрелка неподвижна.

– Это как?

– Представь, что ты микроб и на часовой стрелке сидишь. Или, если хочешь, можешь у себя перед носом часы все время крутить так, чтобы часовая стрелка всегда ровно вверх смотрела.

– Ну представил, и что?

– Смотри, минутная стрелка тогда будет вращаться вокруг часовой со скоростью $11/12$ циферблата в час и будет совпадать с ней каждый раз, когда пройдет весь циферблат.

– Ага. Первое совпадение мы когда считаем, в 00 часов 00 минут? Наверное так. Значит следующий раз они совпадут через… через 12/11 часа.

– Так это же решение. Стрелки совпадают каждые $12/11$ часа. За сутки совпадений будет $24 : (12/11)$, то есть $24 \cdot (11/12)$, а это 22. И как раз мы не учитываем совпадение в следующие 00 часов 00 минут, это ведь уже другие сутки будут.

– Ага, – подтвердил Федя, – я столько же насчитал.

– Ты, кстати, мог бы всего 12 часов свои наблюдения делать. А потом на 2 все умножить.

– Эх, так ведь вообще все очевидно. Совпадения будут через каждый час с небольшой добавкой. Начинаем считать с полуночи. Второе совпадение будет после часа, третье – после двух, … А двенадцатое-то уже ровно на полдень попадет, на начало второй половины суток. Из добавок как раз лишний час набегает.

– Вот и выходит 11 раз за одну половину суток, и еще 11 за другую.

– А там еще задача есть, слушай.

Задача 9. *Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки часов образуют угол 90°?*

– Ну, это почти то же самое. Между соседними моментами, когда стрелки совпадают, они два раза под углом 90° оказываются. Промежутков между совпадениями – от первого до 23-го, в начале следующих суток, – будет 22. Так что ответ 44.

– Лихо ты задачки щелкаешь. А такую как решать?

Задача 10. *В будильнике кроме обычных стрелок есть еще стрелка звонка. Один часовщик сделал шуточный будильник, в котором стрелка звонка двигалась равномерно, причем все время была на прямой, делящей угол между часовой и минутной стрелками пополам. Сколько оборотов сделает такая стрелка за сутки?*

– Эту давай в следующий раз решим. А то я на футбол опоздаю. До завтра!

– Пока! До завтра!

Упражнение 3. Решите задачу, которую ребята отложили на следующий день.

НАМ ПИШУТ

К задаче о колумбовом яйце

Уважаемая редакция!

С большим интересом и удовольствием я прочитал первый номер журнала «Квант+». Особенно мне понравилась статья В.Котова «Физика невыеденного яйца», а в ней – раздел «Задача о колумбовом яйце». Там описано несколько способов, как поставить яйцо вертикально. Я люблю экспериментировать на кухне, поэтому сразу же попытался воспроизвести некоторые из них. К сожалению, удалось не все. Например, закрутить вареное яйцо вертикально я так и не смог. Наверное, руки кривые. А может быть, дело в том, что, согласно законам механики, вращение вокруг малой оси инерции неустойчиво?

В конце этой замечательной статьи есть призыв к читателям предложить свое решение задачи Колумба. Такое решение у меня есть. Оно столь же простое, как и решение самого Колумба, и даже более выгодное, поскольку не приводит к порче яйца. Вот это решение: чтобы яйцо встало вертикально, его нужно просто поставить вертикально. И все! Разумеется, это нужно сделать очень аккуратно: поверхность стола должна быть твердой и ровной, яйцо – свежим, руки не должны дрожать, а дыхание должно быть ровным.

В том, что это возможно, вас убедит сделанная мной фотография (рис.1). Чтобы поставить одно яйцо на острый, а другое – на тупой конец, мне понадобилось около 5 минут.

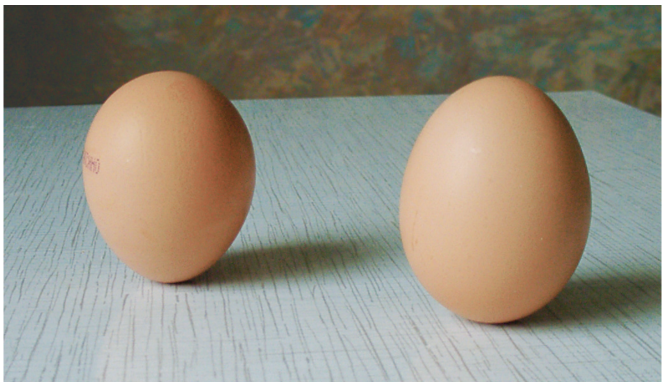


Рис. 1

Торопиться не нужно: содержимое яйца должно успокоиться в том положении, какое вы придали яйцу. Чтобы эксперимент наверняка удавался, надо соблюдать некоторые условия: работать в закрытом помещении (на улице мешает ветер); район эксперимента должен быть сейсмически спокойным; отрывать пальцы от яйца нужно только между ударами сердца; проводить эксперимент можно лишь в дни осеннего либо весеннего равноденствий, когда приливные возмущения со стороны Солнца и Луны практически уравновешивают друг друга.

Честно говоря, я сам не понимаю, почему яйцо может неподвижно оставаться в положении неустойчивого равновесия. Возможно, причина этого – в микроструктуре внешней поверхности скорлупы яйца. Если это действительно так, то обнаруженный мною эффект (я достаточно скромен, чтобы не называть его своим именем, но не возражаю, если это сделает кто-то другой) можно было бы использовать в народном хозяйстве. Поскольку многие нынешние руководители науки и промышленности в юности были читателями «Кванта», я надеюсь, что, прочитав мое письмо, они помогут мне получить грант корпорации «Нанотехнологии» для детального исследования яичной скорлупы и для разработки новых конструкций на основе описанного выше эффекта. Я считаю, что применение выеденных яиц для поддержания любой вертикали – весьма перспективное дело.

Не дожидаясь указанного гранта (хотя надеюсь, что он уже в пути), я предпринял на собственные средства исследование микроструктуры скорлупы яйца с помощью простой фотокамеры. На фотографии (рис.2) отчетливо видно, что поверхность яйца не гладкая: она покрыта многочисленными мелкими выступами. Моя гипотеза состоит в том, что в

Рис. 2

окрестности оси симметрии, проходящей через острый и тупой концы, всегда найдутся три точки, лежащие в вершинах треугольника, через который проходит вертикаль, опущенная из центра масс яйца. Чтобы обнаружить эти точки и вывести мою гипотезу на уровень обоснованной теории, требуется сканирующий электронный микроскоп, который я собираюсь приобрести на грант «Нанотехнологии».

С уважением, читатель и почитатель «Кванта»
В.Сурдин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант$^+$» №1)

1. 19.

Когда у Синеглазки кончилась вода, осталось 10 не политых цветов, среди которых ровно 5 тюльпанов. Поэтому, когда Незнайка собирал свой букет, последний сорванный им цветок – это как раз тот тюльпан, после которого у Синеглазки кончилась вода. Значит, уцелели все остальные политые цветы, т.е. $20 - 1 = 19$ цветов.

2. Рычаг применяется для того, чтобы можно было… проиграть в расстоянии! Большому расстоянию, которое проходит конец рычага, ведомый рукой фотокорреспондента, соответствует поворот камеры на малый угол. Это обеспечивает плавный поворот камеры, а также более точное ее наведение (направление) на снимаемый объект.

Заметим кстати, что для этой же цели в старых радиоприемниках ручка настройки также имела довольно большой диаметр.

3. Невозможно.

В слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ встречаются 10 разных букв (буква Е – четыре раза, а остальные буквы – по разу). Как их не заменяй цифрами, придется использовать все 10 цифр. Тогда сумма цифр получившегося числа равна $1 + 2 + \ldots$ $\ldots + 9 + 0 + 3x = 45 + 3x$, где x – цифра, на которую заменили букву Е. Эта сумма делится на 3 независимо от значения x, поэтому само число делится на 3 и не может быть простым.

4. Ответ: 22.

Разделим бруски на две группы: первая – бруски с площадями поверхности 148, 72, 46 и 28, вторая – остальные бруски, включая невидимый. В каждой группе сумма площадей поверхностей брусков равна площади поверхности большого бруска. Значит, площадь поверхности невидимого бруска равна $148 + 72 + 46 + 28 - 126 - 88 - 58 = 22$.

5. Когда микроволновая печь работает, внутри вращается подставка, на которой стоит чашка. Через минуту чашка останавливалась неудобно: за ручку было не взяться. За лишние три секунды чашка поворачивалась так, что ее удобно было доставать.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6-8»

(см. «Квант» №5 за 2010 г.)

6. В каждом треугольнике со стороной 2 сумма чисел должна равняться 20, поэтому сумма чисел в шести таких треугольниках равна 120. При этом числа, стоящие во внутренних треугольниках со стороной 1, учтены трижды, а остальные числа – по одному разу. Сумма чисел от 1 до 12 равна 78, значит, разница $120 - 78 = 42$ – это удвоенная сумма «внутренних» чисел. Отсюда получаем, что сумма этих чисел равна 21, следовательно, это могут быть только числа от 1 до 6 (их сумма как раз равна 21, а у любого другого набора из шести чисел сумма будет больше). Теперь расставить числа по треугольникам уже несложно. Пример такой расстановки показан на рисунке 1.

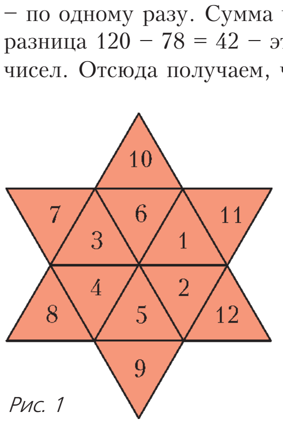
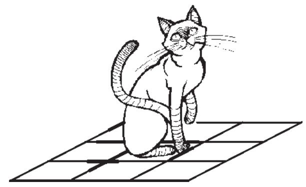


Рис. 1

7. 8.

Сначала кот сидит в одной из комнат, а остальные восемь ему недоступны. Наметим двери, которые мы хотим открыть, и будем открывать их последовательно так, чтобы каждая новая дверь вела из уже доступной коту комнаты. Ясно, что мы каждый раз присоединяем не более одной новой комнаты. Поэтому придется открыть не меньше 8 дверей.



Придумайте сами, какие восемь дверей можно открыть, чтобы кот смог гулять по всей квартире (это можно сделать многими разными способами).

8. 5.

После столкновения быстрый шар становится медленным и наоборот. Удобнее считать, что быстрый шар как бы проходит сквозь медленный, а их скорости не меняются. Скорость сближения шаров равна разности их скоростей, т.е. 5 оборотов в минуту. Значит, после очередной встречи шаров следующая произойдет через $1/5$ минуты. За это время быстрый шар сделает $12/5$ оборотов, т.е. удалится от точки предыдущей встречи на $2/5$ оборота. Следующая точка встречи будет еще через $2/5$ оборота и т.д. Нарисовав эти точки на окружности, увидим, что получаются пять точек, которые делят окружность на пять равных частей (шестая точка встречи совпадет с первой, так как от одной до другой надо сдвинуться на $10/5$ оборотов, т.е. на 2 оборота).

9. Найдется.

Любая точка из красной области (рис.2) подойдет. Попробуйте самостоятельно понять, почему это так, и найдите геометрическое место точек, удовлетворяющих условию.

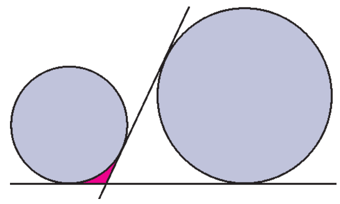


Рис. 2

10. а) На заполнение плоской упаковки уходит больше крошки.

Разрежем длинную упаковку на семь одинаковых цилиндрических коробочек высотой, равной диаметру мячика. При взгляде сверху такая коробочка не отличается от мячика – их проекции совпадают. Поскольку в плоской коробке лежат семь мячиков, то туда влезет семь коробочек, и еще останется место (на рисунке 3 показан вид сверху). Значит, крошки в плоской упаковке больше.

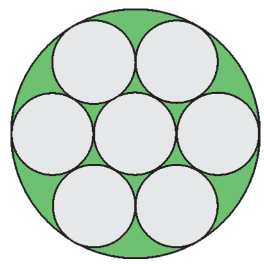


Рис. 3

б) $167\frac{1}{7}$ грамм.

Объем цилиндра высоты h с основанием радиуса r равен $\pi r^2 h$ (произведение площади основания на высоту). Пусть радиус мячика равен 1. Тогда высота длинной упаковки равна 14, а ее объем – 14π. 90 грамм крошки занимают треть этого объема, т.е. $\frac{14\pi}{3}$. Радиус основания плоской упаковки равен 3, а высота – 2, поэтому ее объем равен 18π. Как мы видели в пункте а), в этот объем можно поместить всю длинную упаковку, и еще останется место объемом $18\pi - 14\pi = 4\pi$, которое полностью занято крошкой. Вес x этой части крошки найдем из пропорции $\frac{90}{x} = \frac{14\pi/3}{4\pi}$, откуда $x = \frac{540}{7} = 77\frac{1}{7}$ грамм. Тем самым, вся крошка в плоской упаковке весит $167\frac{1}{7}$ грамм.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Рисунок 4 показывает, что интересующий нас многочлен при переходе от k-го треугольника к $(k+1)$-у подвергается двум операциям: замене x на $x+1$ и домножению на $(x+1)^{n_{k+1}-n_k}$.

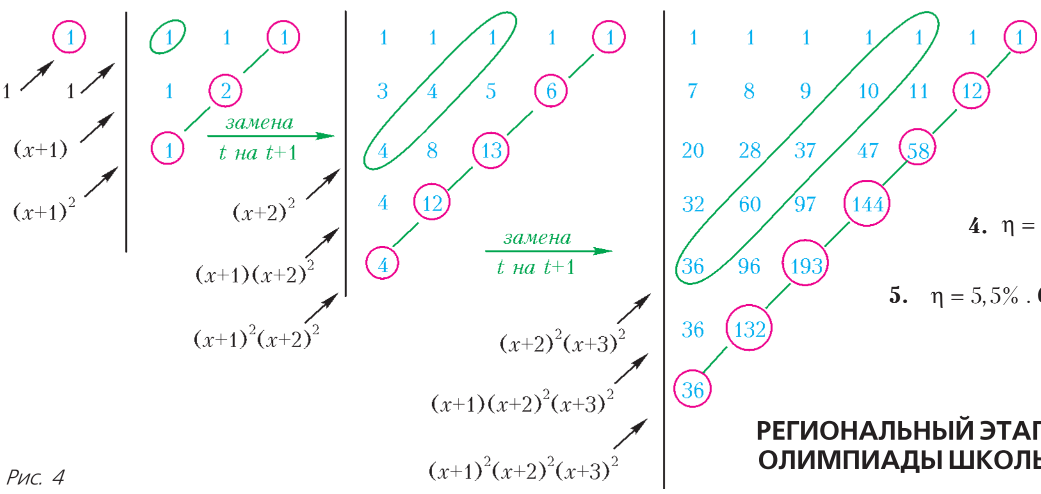


Рис. 4

НЕВОЗМОЖНЫЕ ЗАМОЩЕНИЯ

1. Белых и черных клеток в этой фигуре поровну, но в ее левой половине черных клеток больше, чем белых, а в правой — наоборот (16 против 9 в обоих случаях). Предположим, что замощение доминошками существует. Тогда не более чем одно домино пересекает волнистую линию в середине рисунка 27 статьи, так что левая половина фигурки (кроме, возможно, клетки, примыкающей к волнистой линии) вся замощена доминошками. Поскольку в этой части фигуры черных и белых клеток не поровну, такое невозможно.

4. Будем рассуждать, как в доказательстве теоремы 1. Существование замощения при n, сравнимом с 0, 2, 9 или 11 по модулю 12, при $n \le 12$ показывается явной конструкцией, а далее из замощения для $n = 12k$ строится замощение для $n = 12k + l$, где l равно 2, 9, 11 или 12.

Чтобы доказать, что при остальных n замощение невозможно, заметим для начала, что при наличии замощения общее количество точек должно делиться на 3. Значит, $n(n+1)/2 \equiv 0 \pmod 3$, так что n сравнимо с 0 или 2 по модулю 3. Тем самым нам надо рассмотреть случаи, когда остаток от деления n на 12 равен 3, 5, 6, или 8. Граничные слова трехточечных треугольников имеют вид $x^2yx^{-1}yx^{-1}y^{-2}$ и $xy^2x^{-2}y^{-1}xy^{-1}$. Их дублеры на шестиугольной решетке замкнуты. Сопоставим каждому замкнутому ориентированному пути по шестиугольной решетке сумму чисел оборотов вокруг шестиугольных областей. Для граничных путей треугольников эти числа равны ± 1, а для пути вокруг всего треугольника это число равно $[(n+1)/3]$. Стало быть, если в замощении участвуют m треугольников, то $[(n+1)/3] \equiv m \pmod 2$. С другой стороны, $n(n+1)/2 = 3m$, откуда $n(n+1)/2 \equiv m \pmod 2$. Значит, $[(n+1)/3] \equiv n(n+1)/2 \pmod 2$, и легко видеть, что при n, сравнимом с 3, 5, 6 или 8 по модулю 12, это сравнение не выполняется.

5. Будем рассуждать, как в доказательстве теоремы 3. Определим аддитивную функцию f следующим образом: $f(1) = 1$, $f(\sqrt{2}) = -0{,}5$ и $f(x) = 0$, если x не является рациональной линейной комбинацией 1 и $\sqrt{2}$. «Площадью» прямоугольника со сторонами u и v будем называть число $f(u)f(v)$. Тогда «площадь» области на рисунке 28 статьи равна $-0{,}75$, а если бы эту область можно было замостить квадратами, ее «площадь» была бы неотрицательна — противоречие.

КПД ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

1. $\eta = 1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$.

2. $\eta = \dfrac{A - \nu RT_1}{A + 1{,}5\nu RT_1} = 29\%$.

3. $\eta' = \dfrac{\eta}{1 + 7\eta} = 7{,}3\%$.

4. $\eta = \dfrac{p_1 - p_2}{5p_1}$.

5. $\eta = 5{,}5\%$. **6.** $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XXXVII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Нет, неверно.

Подойдет, например, тройка $1/3$, $1/3$, $2/3$.

Замечание. Все такие тройки можно получить, решив соответствующую систему: $a + b^2 + c^2 = a^2 + b + c^2 = a^2 + b^2 + c$. Из первых двух равенств имеем $a^2 - a = b^2 - b$; перенося все в левую часть, получаем $(a-b)(a+b-1) = 0$. Значит, $a = b$ или $b = 1 - a$; аналогичные утверждения верны для остальных пар чисел. Итого, кроме троек из равных чисел, подходят все тройки вида a, a, $1-a$ и только они.

2. Обозначим через Ω и ω описанные окружности треугольников ABC и BDE (рис.5). Положим $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$. Четырехугольник $BDAC$ вписан в Ω, значит, $\angle ADB = 180° - \angle ACB = 180° - \alpha$. Углы ADB и EDB – смежные, откуда $\angle EDB = 180° - \angle ADB = 180° - \alpha$. Далее, поскольку четырехугольник $EDFB$ вписан в ω, имеем $\angle EFB = \angle EDB = \alpha$.

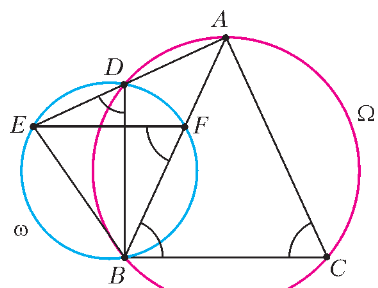


Рис. 5

Итого, $\angle EFB = \angle FBC = \alpha$, а значит, прямые EF и BC параллельны.

3. Проведем пунктиром вертикальные и горизонтальные линии через центры клеток доски. На получившейся пунктирной сетке каждое звено нашей ломаной соединяет узлы, соседние по вертикали, горизонтали или диагонали (рис.6). Поэтому пунктирные прямые

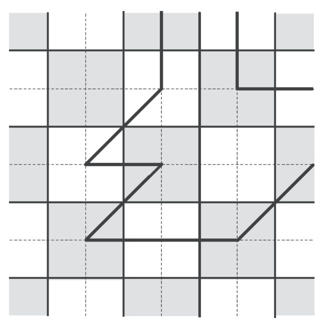


Рис. 6

разбивают область, ограниченную ломаной, на единичные квадратики и половинки квадратиков, получаемые разрезанием их по диагонали.

Осталось заметить, что в каждом таком квадратике и в каждом таком треугольнике площади черной и белой частей равны.

4. Заметим, что $\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b(b+1)}$ для любых положительных a и b. Значит, после переноса всех членов в левую часть требуемое неравенство приобретает вид

$$\frac{y-x}{y(y+1)}+\frac{z-y}{z(z+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)}\le 0. \qquad (*)$$

Можно считать, что x – наибольшее из трех данных чисел. Возможны два случая.

Случай 1: $y \ge z$. В этом случае имеем

$$\frac{x-y}{x(x+1)}\le\frac{x-y}{y(y+1)},\quad \frac{y-z}{x(x+1)}\le\frac{y-z}{z(z+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{x-z}{x(x+1)}\le-\frac{y-x}{y(y+1)}-\frac{z-y}{z(z+1)},$$

что равносильно $(*)$.

Случай 2: $y < z$. Тогда имеем

$$\frac{z-y}{z(z+1)}\le\frac{z-y}{y(y+1)},\quad \frac{x-z}{x(x+1)}\le\frac{x-z}{y(y+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{z-y}{z(z+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)}\le-\frac{y-x}{y(y+1)},$$

что опять же равносильно $(*)$.

5. Подставив $n = 1$ и $n = 2$, получаем, что числа $15a$ и $48a$ – целые. Значит, и число $48a-3\cdot 15a=3a$ – тоже целое. Таким образом, $a = k/3$ для некоторого целого k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трех последовательных четных (или нечетных) чисел n, $n + 2$, $n + 4$ делится на 3; значит, $n(n+2)(n+4)$ делится на 3, а поэтому

$$an(n+2)(n+4)=k\frac{n(n+2)(n+4)}{3}$$

– целое число.

6. Предположим противное; тогда исходные три точки лежат на некоторой окружности ω (рис.7). Докажем индукцией по количеству минут, что все отмеченные точки также лежат на ω. Действительно, изначально это верно. Пусть в некоторый момент по точкам A, B, C строится точка D. Тогда серединный перпендикуляр l к BC проходит через центр ω, значит, эта окружность симметрична относительно l. Так как точка A лежит на ω, то и D также на ней лежит.

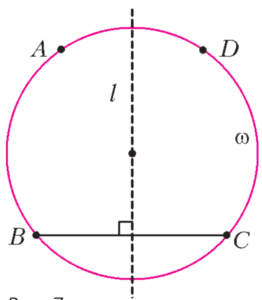


Рис. 7

Итак, через сутки все отмеченные точки лежат на ω. Но любая прямая пересекает ω не более чем по двум различным точкам; значит, на ней не найдется трех отмеченных точек. Противоречие.

10 класс

1. Первый мог обогнать второго только на кольцевой дорожке стадиона. Так как он вбежал на стадион первым, на своем первом круге он обогнать второго не мог. Стало быть, обгоны случились, когда первый бежал по стадиону свои второй и третий круги. Пока первый бежал эти два круга, он обогнал второго по крайней мере на круг. Следовательно, второй за это время пробежал не больше одного круга, откуда и вытекает требуемое утверждение.

2. Без ограничения общности можно считать, что точка M лежит между A и K. Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 – центры описанных окружностей треугольников ABM, ABK, CBM и CBK соответственно. Прямые O_1O_3 и O_1O_2 являются серединными перпендикулярами к отрезкам BM и AB соответственно. Значит, углы $O_2O_1O_3$ и ABM равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (рис.8). Аналогично, $\angle O_2O_4O_3=\angle CBK$, а значит, $\angle O_2O_4O_3=$ $=\angle O_2O_1O_3$. Это и означает, что точки O_1, O_2, O_3, O_4 лежат на одной окружности.

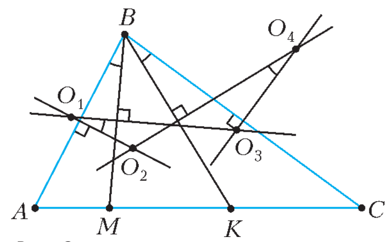


Рис. 8

Замечание. Нетрудно видеть, что точка пересечения прямых O_1O_2 и O_3O_4 – центр O описанной окружности треугольника ABC, причем точки O_2 и O_3 лежат на отрезках OO_1 и OO_4 соответственно. Это позволяет обосновать расположение точек на рисунке.

3. Не может.

Пусть среди наших 14 чисел есть a четных и $b=14-a$ нечетных. Нечетное число на доске может появиться лишь как сумма четного и нечетного, т.е. таких чисел будет ab (при этом каждое будет выписано по два раза). Но

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}\le\frac{(a+b)^2}{4}=49.$$

Значит, на доске будет не более 49 различных нечетных чисел; а чтобы выполнялось условие, их должно быть хотя бы 50. Значит, требуемое невозможно.

4. *Первое решение.* Заметим сразу, что все корни наших уравнений – ненулевые, поскольку свободные члены не равны нулю.

Пусть p – общий корень первых двух уравнений. Тогда имеем

$$0=b\left(ap^{11}+bp^4+c\right)-a\left(bp^{11}+cp^4+a\right)=p^4\left(b^2-ac\right)-\left(a^2-bc\right),$$

$$0=b\left(bp^{11}+cp^4+a\right)-c\left(ap^{11}+bp^4+c\right)=p^{11}\left(b^2-ac\right)-\left(c^2-ab\right).$$

Отсюда следует, что если одно из чисел $A=a^2-bc$, $B=b^2-ac$, $C=c^2-ab$ равно нулю, то и все три равны нулю. Но тогда $a/b = b/c = c/a$, а поскольку произведение этих чисел равно 1, то и все они равны 1, т.е. $a = b = c$. В этом случае утверждение задачи очевидно.

В противном случае все три числа A, B, C ненулевые. Тогда $p^4=\frac{A}{B}$, $p^{11}=\frac{C}{B}$. Обозначив через q общий корень второго и третьего уравнений, а через r общий корень третьего и первого уравнений. Аналогично предыдущему, имеем $q^4=\frac{B}{C}$, откуда $p^{11}q^4=1$. Таким же образом получаем равенства $q^{11}r^4=1$, $r^{11}p^4=1$. Отсюда $p^{11\cdot 11\cdot 11}=q^{-4\cdot 11\cdot 11}=r^{4\cdot 4\cdot 11}=p^{-4\cdot 4\cdot 4}$, следовательно, $p^{11^3+4^3}=1$, значит, $p = 1$. Аналогично $q = r =$ $= 1$. Но тогда 1 является общим корнем всех трех уравнений.

Замечание. В случае если все три числа A, B, C ненулевые, решение можно завершить по-другому. Переименовав, если надо, переменные по циклу, можно считать, что $|B|$ – среднее по величине из чисел $|A|$, $|B|$, $|C|$. Тогда из полученных выше равенств следует, что одно из чисел $|p|^4=\frac{|A|}{|B|}$ и $|p|^{11}=\frac{|C|}{|B|}$ не больше единицы, а другое – не меньше единицы. Это возможно лишь тогда, когда оба они равны единице, т.е. $|p| = 1$. Аналогично $|q| = |r| = |p| = 1$, и два из чисел p, q, r равны, скажем $p = q$. Но тогда это число является общим корнем всех трех уравнений.

Второе решение. Достаточно доказать, что одно из данных уравнений имеет ровно один корень; тогда он будет общим у этого уравнения с каждым из остальных. Рассмотрим среди данных уравнений то, в котором коэффициенты при x^4 и свободный член имеют одинаковый знак, пусть для определенности $b = -b' < 0$, $c = -c' < 0$ (случай $b > 0$, $c > 0$ сводится к случаю $b < 0$, $c < 0$ домножением уравнения на -1). Пусть $a > 0$ (случай $a < 0$ сводится к случаю $a > 0$ заменой переменной x на $-x$).

Покажем, что уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = ax^{11} - b'x^4 - c'$, имеет не более одного корня (на самом деле, оно имеет ровно один корень). Перепишем это уравнение в виде

$$x^4\left(ax^7 - b'\right) = c'.$$

Видим, что при $x < d = \left(\dfrac{b'}{a}\right)^{1/7}$ уравнение не имеет решений, так как левая часть отрицательна. На промежутке же $[d, +\infty)$ левая часть монотонно возрастает, поскольку оба сомножителя неотрицательны и возрастают. Значит, на этом промежутке не более одного корня.

Замечание. Кроме рассуждения, проведенного выше, единственность корня у многочлена $f(x)$ можно показать с использованием производной.

5. $a = \dfrac{k}{6}$, где k – любое целое число.

Подставив $n = 1$, $n = 3$ и $n = 4$, получаем, что числа $2^2 \cdot 3 \cdot 5a$, $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7a$ и $2^6 \cdot 3 \cdot 7a$ – целые. Значит, a – рациональное число, имеющее несократимую запись $\dfrac{p}{q}$, где q является делителем числа $\text{НОД}\left(2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, 2^6 \cdot 3 \cdot 7\right) = 6$, и $a = k/6$ при некотором целом k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трех последовательных чисел $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ делится на 3, а одно из последовательных чисел $n + 2$, $n + 3$ делится на 2; значит, $n(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 2 и на 3, а значит, и на 6. Поэтому

$$an(n+2)(n+3)(n+4) = k\frac{n(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$$

– целое число.

7. Пусть BB' и CC' – высоты треугольника (рис.9). Так как OB_0 и OC_0 – серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB, то отрезки $B'B_0$ и $C'C_0$ равны высотам ромба $OPHQ$, значит, $B'B_0 = C'C_0$. Но эти отрезки являются проекциями отрезка OH на прямые AB и AC; значит, OH составляет равные углы с этими прямыми. Это означает, что прямая OH параллельна либо внутренней, либо внешней биссектрисе угла BAC.

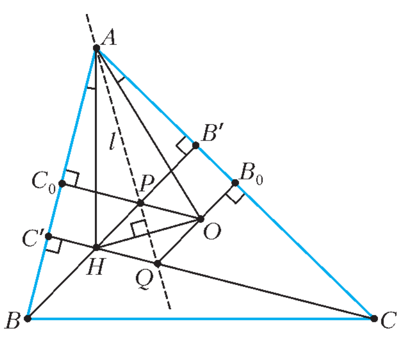


Рис. 9

Так как $\angle AOC = 2\angle ABC$, то $\angle CAO = 90° - \dfrac{1}{2}\angle AOC = 90° - \angle ABC = \angle BAH$. Это значит, что лучи AO и AH симметричны относительно биссектрисы l угла BAC; в частности, OH пересекает l и потому не может быть ей параллельна. Итак, $OH \perp l$, и l является биссектрисой и высотой треугольника AOH. Отсюда $AH = AO$, и точка A, как и точки P, Q, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку OH.

11 класс

1. Не существует.

Предположим противное. Тогда число $A = \cos\alpha + \cos 5\alpha$ иррационально как сумма рационального и иррационального; с другой стороны, $A = 2\cos 2\alpha \cos 3\alpha$ рационально как произведение трех рациональных чисел. Противоречие.

Замечание. Если убрать из условия $\cos 5\alpha$, то ответ будет другим. Например, при $\alpha = \pi/6$ число $\cos\alpha$ иррационально, а числа $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$ рациональны. С другой стороны, из решения видно, что $\cos 4\alpha$ можно удалить из условия безболезненно.

2. Предположим, что среди данных чисел четное количество отрицательных. Тогда среди них есть положительное число a, и произведение всех чисел, кроме a, положительно. Это противоречит условию.

Значит, среди данных чисел нечетное число отрицательных. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ – две группы, на которые разбиты данные числа ($k + m = 2011$). Ровно одно из двух произведений $x_1x_2\ldots x_k$ и $y_1y_2\ldots y_m$ (а именно то, в котором нечетное число отрицательных сомножителей) – отрицательно; пусть для определенности $x_1x_2\ldots x_k < 0$, $y_1y_2\ldots y_m > 0$. Тогда среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ найдется отрицательное, скажем, $x_1 < 0$. Отсюда $x_2\ldots x_k > 0$, а значит, $x_2\ldots x_k \geq 1$ (так как данные числа целые). Следовательно,

$$x_1x_2\ldots x_k + y_1y_2\ldots y_m \leq x_1 + y_1y_2\ldots y_m \leq x_1 + y_1y_2\ldots y_m x_2\ldots x_k.$$

Но по условию $x_1 + y_1y_2\ldots y_m x_2\ldots x_k < 0$.

Замечание. Можно показать, что условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда среди данных чисел ровно одно отрицательное, и его модуль больше произведения всех остальных.

3. Отметим на продолжении отрезка AD такую точку T, что $AT = DM$ (рис.10). Тогда прямоугольные треугольники CDM и BAT равны, а значит, $BT \parallel CM$. Заметим, что $DT = DA + AT = 3DM + DM = 4DM$. По теореме Фалеса, прямая CM пересекает отрезок BD в точке N такой, что $DB = 4DN$. Значит, $DN = NO$, т.е. KN – медиана треугольника OKD.

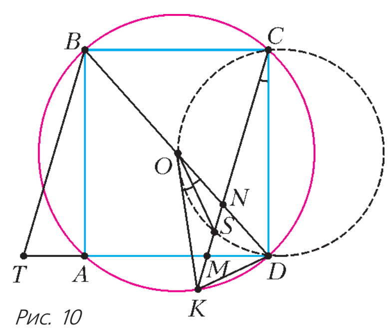


Рис. 10

Пусть S – точка пересечения медиан треугольника OKD. Поскольку $OD = OK$, точка S лежит на биссектрисе угла KOD, и $\angle SOD = \dfrac{1}{2}\angle KOD$. С другой стороны, вписанный угол KCD равен половине центрального угла KOD, откуда $\angle SOD = \dfrac{1}{2}\angle KOD = \angle SCD$. Это и означает, что точки S, D, O, C лежат на одной окружности.

4. За 2010 рейсов.

Покажем вначале, что за 2009 рейсов план выполнить удастся не всегда. Пусть (при произвольной схеме дорог) изначально весь цемент расположен на одном складе S, а распределить его нужно по всем складам поровну. Тогда на каждый склад, кроме S, нужно в каком-нибудь рейсе цемент завезти; ясно, что такие 2010 рейсов различны, поэтому всего рейсов должно быть не меньше 2010.

Нам осталось показать, что за 2010 рейсов план всегда удастся выполнить. Мы докажем индукцией по n, что при n складах всегда удастся обойтись $n-1$ рейсом. База при $n = 1$ очевидна.

Пусть $n > 1$. Так как с любого склада можно добраться до любого другого, то существует маршрут, проходящий по всем складам (может быть, неоднократно). Рассмотрим любой такой маршрут и склад A, который впервые появился на этом маршруте позже всего. Тогда, если удалить склад A и все дороги, ведущие из него, то по-прежнему от любого склада до любого другого можно добраться (по предыдущим дорогам маршрута).

Можно считать, что A – склад с номером n. Если $y_n \le x_n$, то вывезем из A на любой соединенный с ним склад $x_n - y_n$ кг цемента, а после этого забудем про него и про все дороги, из него ведущие. По предположению индукции, для оставшихся складов можно выполнить план за $(n-1)-1$ рейс. В итоге через $(n-2)+1$ рейс получится требуемое распределение цемента.

Если же $y_n > x_n$, то мы уже доказали, что из распределения, когда на i-м складе находится y_i кг, можно получить распределение, когда на i-м складе находится x_i кг, за $n-1$ рейс. Проведя теперь все эти перевозки в обратном порядке (и обратном направлении), мы осуществим требуемый план.

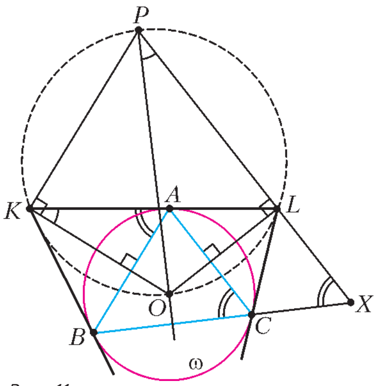


Рис. 11

5. См. решение задачи 5 для 10 класса.

6. *Первое решение.* Докажем, что точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Пусть O – центр окружности ω, а X – точка пересечения прямых BC и PL (рис.11). Так как O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, достаточно доказать, что $OP \perp BC$.

Точки A и B симметричны относительно прямой OK, поэтому $OK \perp AB \parallel KP$. Аналогично, $OL \perp LP$. Поскольку $\angle OKP = \angle OLP = 90°$, четырехугольник $OKPL$ вписанный, откуда $\angle OPL = \angle OKL$. Из касания вытекает, что $\angle KAB = \angle ACB = \angle PXB$. Таким образом, $\angle OPX + \angle PXB = \angle OKL + \angle KAB = 90°$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть прямые BK и CL пересекаются в точке M (рис.12). Поскольку треугольник ABK равнобедренный, имеем

$$\angle PKA = \angle BAK = \frac{1}{2}(180° - \angle AKB).$$

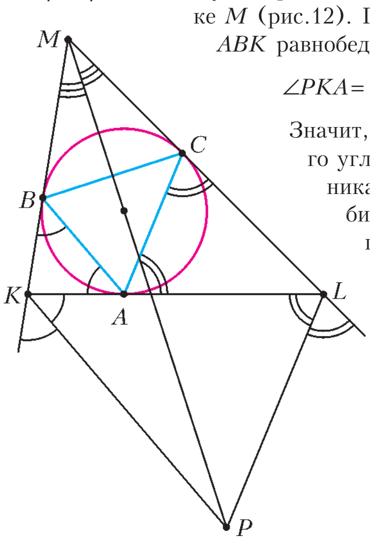


Рис. 12

Значит, KP – биссектриса внешнего угла при вершине K треугольника KLM. Аналогично, LP – биссектриса внешнего угла при вершине L. Тогда P – центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны KL, поэтому P лежит на биссектрисе угла M. Поскольку $MB = MC$, точки B и C симметричны относительно этой биссектрисы. Значит, и отрезки PB и PC также симметричны и потому равны.

7. 504.

Обозначим полученный правильный 2011-угольник через M, его вершины (по часовой стрелке) – через $X_1, X_2, \ldots, X_{2011}$, его вписанную окружность через ω, а его центр – через O. Назовем прямые, содержащие стороны многоугольника, *выделенными*.

Заметим, что для любых пяти последовательных вершин A, B, C, D, E многоугольника M существует окружность, отличная от ω, касающаяся прямых AB, BC, CD и DE (рис.13). Действительно, вершины A и E, а также B и D симметричны относительно прямой CO. Тогда точка пересечения внешней биссектрисы угла ABC с прямой CO отлична от O и равноудалена от прямых AB, BC, CD и DE, а значит, является центром искомой окружности. Теперь, если Вася нарисует 503 такие окружности для точек (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5), (X_5, X_6, X_7, X_8, X_9), …, ($X_{2009}, X_{2010}, X_{2011}, X_1, X_2$), а также окружность ω, то любая выделенная прямая будет общей касательной к двум проведенным окружностям. Итак, 504 окружностей достаточно.

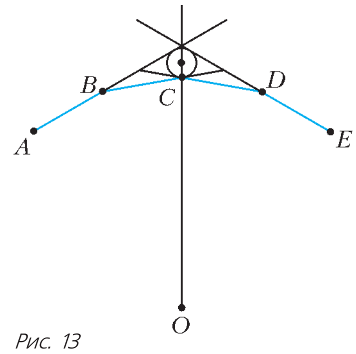


Рис. 13

Осталось доказать, что окружностей должно быть не менее 504. Каждой выделенной прямой должны касаться хотя бы две окружности. Окружность ω касается всех 2011 этих прямых. У любой другой окружности есть не более четырех общих касательных с ω; значит, она касается не более четырех выделенных прямых. Итак, если окружностей n, то всего происходит не более чем $2011 + 4(n-1)$ касаний окружности с выделенными прямыми; с другой стороны, их должно быть не меньше $2011 \cdot 2 = 4022$. Итак, $2011 + 4(n-1) \ge 2 \cdot 2011$, откуда $n \ge 2011/4 + 1 > 503$, что и требовалось доказать.

8. Лемма. *Для любых вещественных $x \ge y \ge 0$ и натурального n верно неравенство*

$$x^n - y^n \ge (x-y)^n.$$

Доказательство. Пусть $x = y + t$, $t \ge 0$. Раскрывая $x^n = (y+t)^n$ по биному Ньютона, имеем $x^n = y^n + \ldots + t^n \ge y^n + t^n$, или $x^n - y^n \ge t^n$. Лемма доказана.

Без ограничения общности можно считать, что $b \ge c$. Обозначим $n = 2011$. Применим лемму к числам b, c, а также к числам b^2, c^2; мы получим

$$b^n - c^n \ge (b-c)^n,$$

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n) = (b^2)^n - (c^2)^n \ge (b^2 - c^2)^n = (b-c)^n = (b-c)^n (b+c)^n.$$

Перемножив полученные неравенства, получаем неравенство

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n)(b^n - c^n) \ge (b-c)^n (b+c)^n (b-c)^n.$$

Поскольку

$$b^n - c^n = -(c^n - b^n) \text{ и } (b-c)^n = -(c-b)^n,$$

полученное неравенство равносильно требуемому.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. $H = \frac{\pi}{12}h = 5{,}2$ см.

2. 1) $L = \frac{ss_1}{s_1 - s_2} = 1500$ м; 2) $v_2 = \frac{s_0}{\Delta t}\left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right) = 4$ м/с, $v_1 = v_2\frac{s_1}{s_2} = 5$ м/с.

3. $\rho_X = \frac{\rho}{(1{,}2)^3 k} = 2{,}7$ г/см^3 (сплав мог оказаться, например, алюминием).

4. 1) $\lambda = \frac{\mu}{v_1}$; 2) $t = \frac{\tau}{4}$.

8 класс

1. $H < \frac{3m}{\pi R^2\rho} = 11{,}9$ см. **2.** $l = 0{,}4L = 0{,}6$ м.

3. $t = t_п\frac{\lambda}{r+\lambda} \approx 12{,}9$ °С (здесь $t_п = 100$ °С). **4.** $\lambda = \frac{\mu}{3v_1}$.

9 класс

1. $H = \frac{m}{\rho a^2} + \frac{\pi R^2 h}{a^2} \approx 4{,}3$ см.

2. $t = \frac{c_в\mu t_1/(kS) + t_0}{c_в\mu/(kS) + 1} = 48$ °С, где $S = 2a^2 + 4aH$ – площадь поверхности воды.

3. $\Delta v = v_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2v_0^2\Delta h/(gL^2)}} - 1\right) \approx \frac{v_0^3\Delta h}{gL^2} \approx 29$ м/с.

4. 1) $T_1 = \frac{(\sqrt{2}+1)v_0}{\mu g}$; 2) $T_2 = 2\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)L}{\mu g}}$.

5. 1) $U_1 = U_0\frac{R_1}{R_2 + R_3} = 3$ В, $U_2 = U_0\frac{R_3}{R_1 + R_3} = 9$ В, $I_1 = I_3 = \frac{U_0}{R_2} = 6$ мА, $I_2 = -\frac{U_0}{R_1 + R_3} = -3$ мА (стрелка прибора отклонится влево); 2) $U_3 = U_0\frac{R_4 + R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = 7{,}2$ В, $U_4 = -U_0\frac{R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = -4{,}0$ В (стрелка прибора отклонится влево), $U_5 = U_0\frac{R_5 + R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 8{,}8$ В, $I_4 = I_5 = \frac{U_0}{R_4 + R_5 + R_6} = 0{,}8$ мА.

10 класс

1. $R_м = a\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \approx 23{,}4$ см. **2.** $L = \frac{F_1 - F_2}{\rho g} = 8$ м.

3. 1) $b = b_0 - \frac{v_0^2}{\mu g}$, если $v_0 < \sqrt{2\mu g b_0}$, и $b = -b_0$, если $v_0 \ge \sqrt{2\mu g b_0}$; 2) $v_к = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g b_0}$; 3) график зависимости b от v_0^2 приведен на рисунке 14.

4. $V_2 = 4V_1$.

5. 1) $U = -1$ В, стрелка отклонится влево;
2) $I = 0{,}2$ А, стрелка отклонится вправо.

11 класс

1. 10 см $< l_2 <$ 30 см. **2.** $a = g\frac{2m}{M + 5m}$. **3.** $V_1 = \frac{\Delta V}{5}$.

4. Сила тока не изменится.

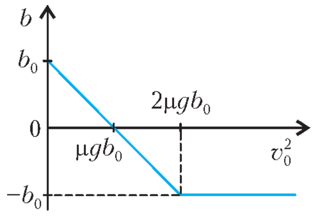


Рис. 14

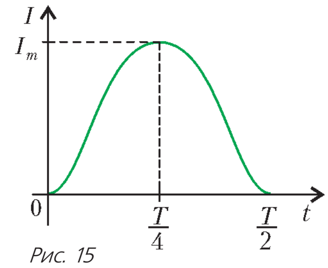


Рис. 15

5. 1) $U_{2C} = \frac{\mathcal{E}}{3}$, $A = \frac{2C\mathcal{E}^2}{3}$; 2) $I = I_m \sin\omega t$ при $t \le \frac{T}{2}$ и $I = 0$ при $t \ge \frac{T}{2}$, где $I_m = \frac{2}{3}\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}$ и $T = 2\pi\sqrt{2LC}$, см. рис.15, $Q_R = \frac{\pi\sqrt{2}}{9}CR\mathcal{E}^2\sqrt{\frac{C}{L}}$, $U_д = -\frac{\mathcal{E}}{3}$.

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ 2010 ГОДА

1. $s = \frac{L}{\sqrt{1 + (v_2/v_1)^2 - 2(v_2/v_1)\cos\alpha}}$.

2. $H = \frac{1}{2}\left(v\sin\alpha\cdot\tau - g\tau^2 + L\left(1 - \cos\frac{v\cos\alpha\cdot\tau}{L}\right)\right)$.

3. $P = F_1 + F_2$, если, например, центр тяжести шкафа находится в секторе между ножками 1 и 2, образованном пересекающимися диагоналями.

4. $a = \frac{F}{3m}$. **5.** $T_2 = \frac{T_0}{0{,}62} = 1{,}6T_0$. **6.** $v_r = \sqrt{3}\frac{qD}{m}$.

7. $C = 4\pi\varepsilon_0 R$. **8.** $p_м = 2\pi\frac{BR^3}{\mu_0}$, $i_m = \frac{3B}{\mu_0}$. **9.** $9I_0$.

КВАНТ⁺

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.С.Воропаев, С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант⁺» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Свидетельство ПИ № ФС77-45551

Тираж 2500 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант⁺»
Тел.: 930-56-48
E-mail: math@kvantjournal.ru, phys@kvantjournal.ru
Сайт: kvantjournal.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь www.Pareto-print.ru